This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

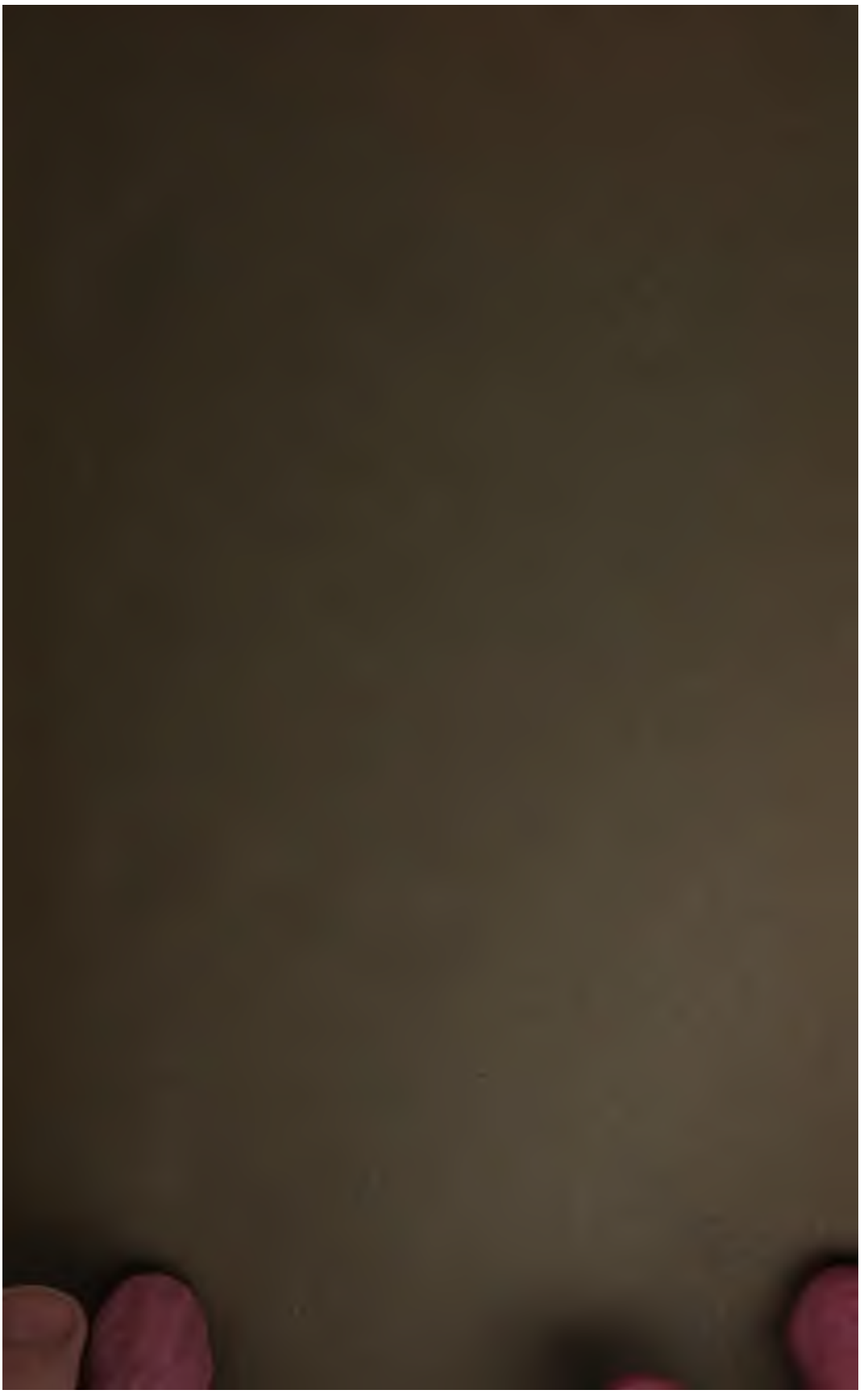
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06644600 0



TRATTATO

DI

MECCANICA RAZIONALE

DEI SOLIDI

PER

L' INGEGNERE C. H. DURVAL

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

ROMA
LIBRERIA ALESSANDRO MANZONI
(Antonio Tenconi)

1878.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

Tipografia del Senato di Forzani e C.

PREFAZIONE

Non è un trattato completo di meccanica razionale ch' io presento al pubblico, ma soltanto la riunione di appunti presi e che possono servir soltanto di base a studi più profondi e più severi.

Se molte lacune si riscontreranno nel presente volume, si è perchè la meccanica dei liquidi e la cinematica applicata sono di per se stesse troppo estese per aver posto in un piccolo trattato: e troppo importanti per poterne dare in poche pagine un'idea completa.

Anche la dinamica dei sistemi materiali è stata brevemente esposta, forse troppo brevemente per un trattato di meccanica razionale, ma che pure è sufficiente per ben comprendere che tutte le verità stabilite per un *punto solo,* restano le stesse quando questo *punto solo* si trasforma in un'agglomerazione di punti; cioè in un corpo materiale.

Tutte le teorie esposte sono da lunga pezza conosciute; è solo nel modo di esporle che forse il benevolo lettore troverà qualche cambiamento.

Non so quale sarà la sorte riserbata al mio lavoro. Non ho voluto stampare un libro, mi sono studiato di rendermi utile a tutti coloro che intraprendono lo studio delle scienze positive.

MECCANICA RAZIONALE

Un corpo è in *moto* quando occupa successivamente differenti posizioni nello spazio; è in *riposo* nel caso contrario.

Un corpo, in moto od in riposo, non modifica il suo stato senza l'intervento di una causa qualunque. Questa causa chiamasi *forza*.

La meccanica ha per iscopo lo studio del moto e delle forze.

Si può studiare il moto di un corpo fatta astrazione delle cause che lo determinano o lo modificano: questo ramo della meccanica chiamasi *cinematica* e dividesi in due: la *cinematica teorica* che studia il moto di un corpo e le condizioni nelle quali questo moto si effettua; la *cinematica applicata* che si occupa dei meccanismi o mezzi atti a realizzare tale o tal'altra trasformazione di moto.

Nella cinematica, all'idea di moto aggiungiamo quella di tempo; e se si aggiunge la considerazione della forza entriamo allora nella *dinamica*.

Più forze possono agire sopra un corpo in modo da farlo restare in riposo. Dicesi allora che il corpo è in equilibrio e chiamasi *statica* il ramo della meccanica che si occupa dell'equilibrio dei corpi. La statica è un caso particolare della dinamica. Divideremo ciò nonostante la meccanica nelle tre parti indicate e studieremo successivamente: la cinematica teorica, la dinamica e la statica.

Nello studio del moto dei corpi, indipendentemente dalle cause che lo producono o lo modificano, possiamo non preoccuparci della materia di cui sono formati e ridurli così a corpi geometrici. Ciò però non potremo fare quando in questo studio introdurremo la nozione della forza, perchè in quest'ultimo caso è necessario sapere su qual quantità di materia agisce una forza per poterne apprezzare gli effetti.

CINEMATICA

Capitolo I.

Moto d'un punto.

Chiamasi *traiettoria* di un punto la curva descritta da questo punto quando si muove nello spazio.

La posizione di un punto sulla sua traiettoria dipende dal tempo t che è scorso dal momento preciso in cui il moto è cominciato fino al momento preciso in cui ogni moto cessa. Perciò la lunghezza d'arco che separa la posizione attuale del punto da un punto qualunque fisso sulla traiettoria, e che nella misura degli archi prendiamo come origine, varierà con il tempo. Questa lunghezza d'arco sarà dunque una funzione del tempo.

Chiamiamo s la lunghezza d'arco OM compresa fra la posizione attuale del punto M ed il punto O preso per origine degli archi.

Questa lunghezza s sarà una funzione di t ed avremo fra s e t una certa relazione

$$s = f(t)$$

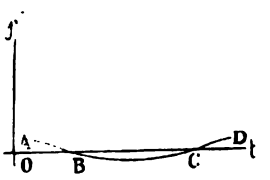
Questa relazione fra s e t chiamasi l'*equazione del moto di un punto sulla sua traiettoria*, perchè ci fa conoscere secondo quali leggi il punto si muove.

Se sopra un piano prendiamo due assi rettangolari e portiamo

in ordinate, per esempio: differenti valori di s ed in ascisse i valori corrispondenti di t dedotti dall'equazione

$$s = f(t)$$

otterremo una curva $A\,B\,C\,D$ che rappresenterà le leggi che regolano



il moto del punto sulla sua traiettoria, ma non già questa traiettoria.

Moto uniforme.

Più definizioni possonsi dare di questo moto e si può dire che *il moto uniforme è quello nel quale il mobile percorre degli spazi eguali in tempi eguali;* oppure: *quello nel quale gli spazi percorsi sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerli;* oppure infine, *quello nel quale il rapporto dello spazio al tempo impiegato a percorrerlo è costante.*

Sia O l'origine degli archi e supponiamo il mobile in M_1 distante dall'origine della lunghezza s_0. Dopo un certo tempo t il mobile è

venuto in M, distante dall'origine della lunghezza s. Dunque nel tempo t il mobile ha percorso lo spazio

$$M_1\,M = s - s_0$$

e chiamando a una costante, abbiamo per definizione:

$$\frac{s - s_0}{t} = a$$

Questa relazione è *l'equazione del moto uniforme* e la costa- chiamasi la *velocità* di questo moto.

Se nell'equazione

$$\frac{s - s_0}{t} = a$$

facciamo $t = 1$ resta:

$$s - s_0 = a$$

Cioè, la *velocità del moto uniforme è eguale allo spazio percorso nell'unità di tempo.*

Riprendiamo l'equazione

$$\frac{s - s_0}{t} = a,$$

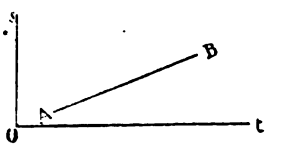
se ne deduce:

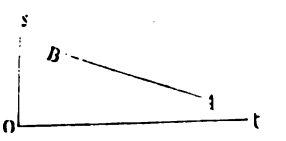
$$s - s_0 = a\,t,$$

e

$$s = s_0 + a\,t$$

è l'equazione di una linea retta la di cui direzione dipende dal senso del moto, come indicano le due figure





Nel moto uniforme la velocità essendo eguale allo spazio percorso nell'unità di tempo, esprimeremo questa velocità con le stesse unità impiegate per esprimere lo spazio.

Prendendo il tempo sempre positivo, se ne può conchiudere per il segno della velocità che:

$s > s_0$ corrisponde alla velocità positiva;

$s < s_0$ corrisponde alla velocità negativa.

Moto variato.

pu. *Qualunque moto che non sia uniforme è variato.*

il pu Chiamasi *moto periodicamente uniforme,* o semplicemente *mot*

Se *dico quello, nel quale il mobile percorre degli spazi eguali*

in tempi eguali ma ciò, sollanto per dei tempi convenientemente scelti.

Supponiamo un mobile che ha un moto qualunque per un tempo infinitamente piccolo *dt*. Questo mobile percorrerà nel tempo *dt* un arco infinitamente piccolo $M M_1 = ds$
della sua traiettoria.

Chiamasi *velocità di questo moto qualunque, nell' istante considerato, la velocità del moto uniforme che bisognerebbe dare al mobile per fargli percorrere lo stesso spazio ds nello stesso tempo dt.* La velocità del moto uniforme, essendo eguale al rapporto dello spazio percorso al tempo impiegato a percorrerlo, il valore di questa velocità sarà $\frac{ds}{dt}$ cioè la derivata di s relativamente a t. Si rappresenta questa velocità per mezzo di una lunghezza presa sulla tangente alla traiettoria nel punto M.

Bisogna osservare però che,

$$s = f(t)$$

essendo l'equazione del moto e $f'(t)$ rappresentando la sua velocità ad un istante qualunque, questa velocità non ha per valore la tangente trigonometrica dell' angolo che fa MN con l'asse ot; perchè ciò fosse, bisognerebbe adottare la stessa unità per i tempi e per gli spazi.

Chiamando V la velocità, abbiamo veduto che nel moto uniforme essa ha per valore

$$V = \frac{s - s_0}{t}$$

ed in un moto qualunque $\frac{ds}{dt} = f'(t)$

La derivata di s, relativamente a t, essendo una funzione di t e non una costante, ne risulta che s è una funzione di t di un grado superiore al primo. Dunque il moto uniforme è il solo la di cui equazione sia di primo grado.

Moto uniformemente variato.

Chiamasi così *il moto nel quale la velocità varia in proporzione del tempo.*

Supponiamo che al principio del tempo t la velocità sia eguale a V_0 e eguale a V alla fine di questo stesso tempo; la sua variazione sarà $V - V_0$, e poichè la velocità è proporzionale al tempo, avremo $\frac{V-V_0}{t} = \text{costante}$.

Il valore di questa costante indicasi generalmente con la lettera j e chiamasi *accelerazione del moto uniformemente variato.*

L'accelerazione è positiva o negativa secondo che

$$V > V_0, \text{ o } V < V_0.$$

Se positiva, il moto è uniformemente accelerato. Se negativa, il moto è uniformemente ritardato.

Dalla formula:

$$\frac{V - V_0}{t} = j$$

Si deduce:

$$V - V_0 = jt$$

$$V = V_0 + jt$$

Questa è l'*equazione delle velocità* e dà la velocità d'un corpo alla fine di un tempo qualunque t.

Ma sappiamo che in un moto variato qualunque si ha:

$$V = \frac{ds}{dt}$$

Dunque,

$$\frac{ds}{dt} = V_0 + jt$$

E

$$ds = (V_0 + jt)\, dt$$

Integrando:

$$s = V_0\, t + {}^1/_2\, jt^2 + c$$

Per determinare la costante arbitraria c, facciamo in quest'ultima equazione $t = o$; e resta allora: $s = c$

Ma $t = o$ corrisponde alla posizione iniziale del mobile sulla sua

traiettoria; chiamando allora s_0 la distanza che separa questa posizione iniziale dall'origine degli archi, avremo:

$$s = V_0 t + {}^1/_2 jt^2 + s_0$$

e la lunghezza d'arco percorsa dal mobile è:

$$s - s_0 = V_0 t + {}^1/_2 jt^2$$

E questa è l'*equazione degli spazi*. Se il moto è uniformemente ritardato, l'equazione delle velocità è:

$$V = V_0 - jt$$

e quella degli spazi:

$$s - s_0 = V_0 t - {}^1/_2 jt^2$$

Il moto è uniformemente accelerato, nel caso generale qui sopra studiato.

Se il corpo è in riposo al principio dell'esperienza abbiamo $V_0 = 0$. E le equazioni doventano:

$$V = jt$$

$$s - s_0 = {}^1/_2 jt^2$$

Se infine prendiamo la posizione iniziale del mobile supposto in riposo al principio dell'esperienza, per origine degli archi, avremo:

$$s_0 = 0, \; V_0 = 0$$

e perciò: $V = jt$

e $s = {}^1/_2 jt^2$

Esempi di moto uniformemente variato.

I. Supponiamo un corpo lanciato nello spazio. Ammettendo che la gravità produca un moto uniformemente variato, e non preoccupandoci della resistenza dell'aria, si domanda:

1° A che altezza è salito il corpo?

2° Quanto tempo è durata l'ascensione?

3° Quanto tempo metterà a tornare al punto di partenza?

4° Qual'è la velocità alla fine dell'esperienza?

La gravità opponendosi all'ascensione del corpo produrrà un moto uniformemente ritardato; cosicchè chiamando H l'altezza alla quale questo corpo è salito e V_0 essendo la sua velocità iniziale, abbiamo per l'altezza richiesta:

$$(1)\quad H = V_0\, t - {}^1/_2\, g\, t^2$$

g essendo l'accelerazione prodotta dalla gravità; e che al livello del mare e per la latitudine di Parigi ha per valore: 9,8088.

Il corpo salirà fino a che la velocità diventi eguale a zero; questa velocità V è data dalla formula

$$V = V_0 - g\, t$$

e per un certo valore T di t, abbiamo:

$$0 = V_0 - g\, T$$

da dove:
$$T = \frac{V_0}{g}$$

Che è precisamente il tempo che è durata l'ascensione. Portando questo valore di t nell'equazione (1), abbiamo:

$$H = V_0\, T - {}^1/_2\, g\, T^2$$

$$H = V_0\, \frac{V_0}{g} - {}^1/_2\, g\, \frac{V_0^2}{g^2}$$

$$H = \frac{V_0^2}{g} - {}^1/_2\, \frac{V_0^2}{g} = {}^1/_2\, \frac{V_0^2}{g},$$

che corrisponde allo spazio percorso.

Quando il corpo ha terminata la sua ascensione, cioè quando ha percorso l'altezza H, $V_0 = 0$ e la velocità del corpo e lo spazio che percorre per discendere saranno dati dalle formule:

$$V = g\, t$$

$$H = {}^1/_2\, g t^2$$

Chiamiamo T' il tempo impiegato dal mobile per percorrere lo spazio H nella sua discesa; avremo:

$$H = {}^1/_2\, g\, T'^2$$

Ma abbiamo già trovato:

$$H = {}^1/_2\, \frac{V_0^2}{g}$$

Dunque, dobbiamo avere:

$$\tfrac{1}{2}\frac{V_0^{\,2}}{g} = \tfrac{1}{2}\, g\, T^{\,2}$$

Oppure:
$$\frac{V_0^{\,2}}{g} = g\, T'^{\,2}$$

Da dove:
$$T'^{\,2} = \frac{V_0^{\,2}}{g^2},$$

$$T' = \frac{V_0}{g}.$$

Dunque $T = T'$

Ciò vuol dire che il mobile impiega lo stesso tempo per salire all'altezza H che per discendere da quest'altezza.

Chiamando infine V' la velocità finale, abbiamo:

$$V' = g\, T' = g\, \frac{V_0}{g} = V_0.$$

La velocità finale è eguale alla velocità iniziale.

II. Supponiamo che si lasci cadere un corpo pesante in fondo ad un pozzo. Si misura il tempo T che passa fra l'istante che si lascia cadere il corpo e l'istante in cui il suono da lui prodotto toccando il fondo del pozzo viene a ferire il nostro orecchio. Conoscendo la velocità V di propagazione del suono, si domanda la profondità del pozzo.

Ammettiamo che il suono si propaghi con un moto uniforme e che il corpo cada con un moto uniformemente accelerato; chiamiamo T' il tempo impiegato dal mobile per arrivare in fondo al pozzo, T'' il tempo impiegato dal suono per venire dal fondo del pozzo a noi, e H la profondità cercata. Avremo:

$$(1)\quad T = T' + T''.$$

suono percorrendo la profondità H del pozzo nel tempo T'' e moto uniforme, abbiamo:

$$(2)\quad H = V\, T''.$$

empo T' il corpo percorre la profondità H con un moto uni-te accelerato, dunque:

$$(3)\quad H = \tfrac{1}{2}\, g\, T'^{\,2}.$$

minando T' e T'' fra le equazioni (1), (2), (3), avremo

quazione che ci darà il valore di H in funzione delle quantità conosciute V, T e g. L'equazione (2) dà:

$$T''' = \frac{H}{V}$$

L'equazione (3) dà:

$$T'^{2} = \frac{H}{\frac{1}{2}g} = \frac{2H}{g}$$

e $$T' = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Sostituendo nell'equazione (1) a T' ed a T''' i loro valori avremo

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{H}{V}$$

Oppure:

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} = T - \frac{H}{V}$$

Elevando al quadrato:

$$\frac{2H}{g} = T^{2} - 2\,\frac{TH}{V} + \frac{H^{2}}{V^{2}}$$

Ciò che si può scrivere:

$$\frac{H^{2}}{V^{2}} - 2H\left(\frac{T}{V} + \frac{1}{g}\right) + T^{2} = 0$$

Da dove:

$$H = \frac{\frac{T}{V} + \frac{1}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{T}{V} + \frac{1}{g}\right)^{2} - \frac{T^{2}}{V^{2}}}}{\frac{1}{V^{2}}}$$

$$H = \frac{\frac{Tg + V}{Vg}}{\frac{1}{V^{2}}} \pm \frac{\sqrt{\frac{T^{2}}{V^{2}} + \frac{2T}{Vg} + \frac{1}{g^{2}} - \frac{T^{2}}{V^{2}}}}{\frac{1}{V^{2}}}$$

$$H = VT + \frac{V^{2}}{g} \pm \frac{\sqrt{\frac{2T}{Vg} + \frac{1}{g^{2}}}}{\frac{1}{V^{2}}}$$

$$H = VT + \frac{V^{2}}{g} \pm V^{2}\sqrt{\frac{2T}{Vg} + \frac{1}{g^{2}}}$$

E la profondità del pozzo sarà:

$$H = V\,T + \frac{V^2}{g} - V^2\sqrt{\frac{2\,T}{V\,g} + \frac{1}{g^2}}$$

Infatti: $V\,T'' < V\,T$

poichè $T'' + T' = T$

Ma $V\,T'' = H.$

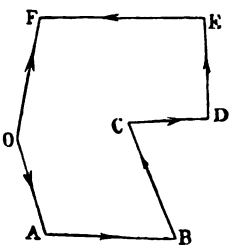
Prendendo dunque il radicale con il segno +, si aggiungerebbe qualche cosa ad una quantità già più grande di H; bisogna dunque prendere il radicale con il segno —.

Capitolo II.

Determinazione del moto effettivo di un punto per mezzo delle sue proiezioni sopra tre assi coordinati.

Resultanti geometriche.

Siano nello spazio un numero qualunque di linee rette perfettamente determinate. Se da un punto qualunque conduciamo una



parallela ad una di queste rette, e dall'estremità di questa parallela un'altra parallela ad un'altra retta, e così via di seguito, formeremo nello spazio un contorno poligonale che in generale non sarà nè piano nè chiuso. Supponiamo che operando come si è ora detto siamo partiti dal punto *O* per arrivare al punto *F*, seguendo sulle rette *OA*, *AB*, ecc., il senso indicato dalle freccie; ciò fatto, se si conduce la retta *OF* seguendo sopra questa retta il senso contrario a quello adottato per le altre rette, *OF* chiamasi *la resultante geometrica delle rette date.*

Proprietà principali della resultante geometrica.

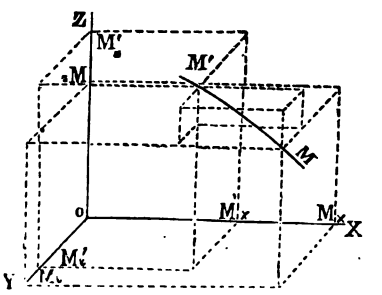
Non si cambia la resultante quando si cambia l'ordine di successione delle rette (componenti).

La proiezione della resultante sopra una retta qualunque è

eguale alla somma delle proiezioni delle componenti sopra questa medesima retta.

Se due sole sono le rette date, la loro resultante geometrica sarà la diagonale del parallelogrammo fatto su queste due componenti. Se tre, la resultante geometrica sarà la diagonale del parallelepipedo fatto sulle tre componenti.

Supponiamo nello spazio un punto che percorre una certa traiettoria, e supponiamo che in un tempo infinitamente piccolo *dt* percorra l'arco *M M'*. Consideriamo le proiezioni dei punti *M* e *M'* sopra



tre assi coordinati *OX*, *OY*, *OZ*, e siano *Mx*, *My*, *Mz* le tre proiezioni del punto *M* e *M'x*, *M'y*, *M'z* le tre proiezioni del punto *M'*. Facciamo un parallelepipedo tale che abbia le sue costole parallele agli assi coordinati, e sia *MM'* la sua diagonale. Le tre dimensioni di questo parallelepipedo saranno eguali a *MxM'x*, *MyM'y*, *MzM'z*. Queste tre lunghezze sono i tre spazi percorsi sopra i tre assi in uno stesso tempo infinitamente piccolo *dt* dalle tre proiezioni del punto *M*. Il cammino percorso dal punto *M* nello spazio è dunque la resultante geometrica degli spazi percorsi dalle tre proiezioni di questo stesso punto sugli assi.

Sia *ds* il cammino percorso dal punto *M* nello spazio, e *dx*, *dy*, *dz* i cammini percorsi dalle proiezioni di detto punto sopra gli assi *OX*, *OY*, *OZ*. Avremo:

$$ds = Res \begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases}$$

Costruiamo un parallelepipedo simile a quello la di cui diagonale è *MM'*, dividendo tutti i lati di quest'ultimo per *dt*. Le dimen-

sioni di questo parallelepipedo saranno $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, la sua diagonale sarà $\frac{ds}{dt}$ e potremo scrivere:

$$\frac{ds}{dt} = Res \begin{cases} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

Ma $\frac{ds}{dt}$ è la velocità del punto M sulla sua traiettoria e

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

sono le velocità dei punti Mx, My, Mz. Dunque la velocità di un punto dello spazio è la resultante geometrica delle velocità delle proiezioni di detto punto sopra tre assi coordinati; e si ha:

$$\frac{ds}{dt} = V, \frac{dx}{dt} = Vx, \frac{dy}{dt} = Vy, \frac{dz}{dt} = Vz,$$

e potremo scrivere:

$$V = Res \begin{cases} Vx \\ Vy \\ Vz \end{cases}$$

Ogni costola del parallelepipedo potendo essere considerata come la proiezione obliqua della diagonale di questo parallelepipedo, si può dire che *il cammino percorso dalla proiezione di un punto sopra un asse è eguale alla proiezione sopra quest'asse del cammino percorso dal punto nello spazio,* e *la velocità della proiezione di un punto sopra un asse è eguale alla proiezione della velocità di detto punto sopra quest'asse.* Se gli assi sono rettangolari, potremo scrivere:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

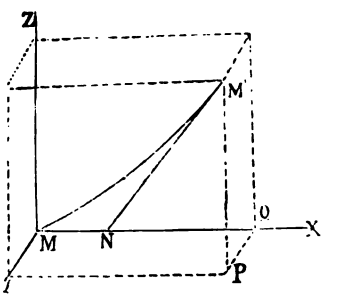
$$V^2 = Vx^2 + Vy^2 + Vz^2$$

Accelerazione totale.

L'accelerazione di un punto nello spazio chiamasi *accelerazione totale* perchè è suscettibile di una decomposizione che indicheremo or ora.

Conoscendo lo spazio percorso da un punto in un tempo dato, si può calcolare la sua accelerazione totale.

Supponiamo che nel tempo dt il punto M percorra l'arco MM' della sua traiettoria. Sia V la velocità nel punto M: se a partire



di questo punto il moto si continua sulla tangente alla traiettoria in M invece di continuare sulla traiettoria stessa, MN essendo lo spazio percorso sulla tangente, avremo:

$$MN = Vt$$

Chiamando J l'accelerazione totale, io dico che avremo:

$$J = \frac{2\,NM'}{dt^2}$$

Prendiamo per origine il punto M, per asse delle x la tangente alla traiettoria in M, per asse delle z la direzione dell'accelerazione totale in M che supponiamo conosciuta e per asse degli y una retta qualunque.

La posizione del punto M sulla traiettoria essendo una funzione del tempo; le coordinate del punto M' saranno funzioni di questo

stesso tempo, funzioni che potremo sviluppare secondo le potenze crescenti di t. Potremo dunque scrivere:

$$(1) \quad x = a + b\ t + c\ t^2 + e\ t^3 + \ldots\ldots$$

$$(2) \quad y = a' + b'\ t + c'\ t^2 + e'\ t^3 + \ldots\ldots$$

$$(3) \quad z = a'' + b''\ t + c''\ t^2 + e''\ t^3 + \ldots\ldots$$

Le quantità a, b, c, e, a', b'.... essendo dei coefficienti da determinarsi.

Il punto M corrisponde a $t = 0$. Ma per $t = 0$ bisogna avere:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

E come facendo $t = o$ nelle equazioni (1), (2), (3) ne risulta:

$$x = a, \quad y = a', \quad z = a''$$

Così avremo: $a = 0, \quad a' = 0, \quad a'' = 0.$

La velocità delle proiezioni del punto M' sopra i tre assi ad un istante qualunque sono date, chiamando Vx, Vy, Vz queste velocità, dalle tre equazioni seguenti:

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = Vx = b + 2c'\ t + 3e\ t^2 + \ldots\ldots$$

$$(5) \quad \frac{dy}{dt} = Vy = b' + 2c'\ t + 3e'\ t^2 + \ldots\ldots$$

$$(6) \quad \frac{dz}{dt} = Vz = b'' + 2c''\ t + 3e''\ t^2 + \ldots\ldots$$

E per il punto M che corrisponde a $t = 0$ ne risulta:

$$Vx = b, \quad Vy = b', \quad Vz = b''$$

Ma l'asse delle x è la tangente in M alla traiettoria, cioè a dire diretta secondo la velocità del mobile in questo punto. Dunque:

$$Vx = V, \quad Vy = 0 \quad Vz = 0$$

e perciò: $V = b, \quad b' = 0, \quad b'' = 0$

Derivando le equazioni (4), (5) e (6), avremo le accelerazioni delle proiezioni del punto M' sopra i tre assi.

Queste accelerazioni saranno date dalle equazioni:

$$\frac{dVx}{dt} = 2\,c + 6\,e\,t + \ldots\ldots$$

$$\frac{dVy}{dt} = 2\,c' + 6\,e'\,t + \ldots\ldots$$

$$\frac{dVz}{dt} = 2\,c'' + 6\,e''\,t + \ldots\ldots$$

Per il punto M l'accelerazione totale essendo diretta secondo una parallela all'asse oz, per $t = o$, avremo:

$$\frac{dVx}{dt} = 0,\ \frac{dVy}{dt} = 0,\ \frac{dVz}{dt} = J$$

Ciò che dà

$$2\,c = 0,\ 2\,c' = 0,\ 2\,c'' = J$$

Cioè: $$c = 0,\quad c' = 0,\quad c'' = \frac{J}{2}.$$

Se nelle equazioni (1), (2) e (3), ai coefficienti $a, b, c\ldots\ldots, a', b', c'\ldots, a'', b'', c''\ldots.$ sostituiamo i loro valori, avremo:

$$x = Vt + e\,t^3 + \ldots\ldots$$

$$y = e'\,t^3 + \ldots\ldots$$

$$z = \frac{J}{2}\,t^2 + e''\,t^3 + \ldots\ldots$$

Consideriamo il quadrilatero $NM'\,PQ$. Abbiamo:

$$N\,M' = Res \begin{cases} NQ \\ QP \\ PM' \end{cases}$$

Ma:

$$NQ = MQ - MN$$

Le tre coordinate del punto M' sono:

$$MQ = x,\ QP = y,\ PM' = z$$

e perciò:
$$NM' = Res \begin{cases} MQ - MN \\ QP \\ PM \end{cases}$$

Abbiamo preso:
$$MN = Vt$$

Dunque:
$$NQ = x - Vt$$

E viene:
$$NM' = Res \begin{cases} x - V\,t \\ y \\ z \end{cases}$$

Costruiamo un quadrilatero simile a quello che ora si studia, nel quale tutti i lati siano moltiplicati per $\frac{2}{t^2}$, avremo:

$$\frac{2\,NM'}{t^2} = Res \begin{cases} \frac{2\,(x - Vt)}{t^2} \\ \frac{2\,y}{t^2} \\ \frac{2\,z}{t^2} \end{cases}$$

L'equazione (1) dà:
$$x - V\,t = e\,t^3 + \ldots\ldots$$

Oppure:
$$\frac{2\,(x - Vt)}{t^2} = 2\,e\,t + 2t\,(\ldots\ldots)$$

(2) dà:
$$\frac{2\,y}{t^2} = 2\,e'\,t + 2\,t\,(\ldots\ldots)$$

(3) dà:
$$\frac{2\,z}{t^2} = J + 2e''t + 2t\,(\ldots\ldots)$$

E facendo tendere t verso *zero*, viene:

$$\lim \frac{2\,NM'}{t^2} = Res \begin{cases} \lim \frac{2\,(x - Vt)}{t^2} \\ \lim \frac{2\,y}{t^2} \\ \lim \frac{2\,z}{t^2} \end{cases}$$

e passando ai limiti si ha:

$$\lim \frac{2\,(x - V\,t)}{t^2} = o$$

$$\lim \frac{2\,y}{t^2} = 0$$

$$\lim \frac{2\,z}{t^2} = J.$$

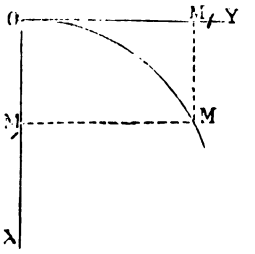
Resta dunque:

$$\lim \frac{2\,NM'}{t^2} = J = \frac{2\,NM'}{dt^2}$$

Esempio.

Un corpo è lanciato orizzontalmente nello spazio con una velocità V_0. Determinare la curva descritta da questo corpo e trovare la velocità a un istante qualunque.

Il moto avendo luogo in piano, due assi coordinati bastano.



Prendiamo per origine il punto O, posizione iniziale del mobile. Dopo un certo tempo t il mobile sarà venuto in M, e poichè è partito dal punto O, la sua proiezione sull'asse delle x avrà percorso

OM_x e quella sull'asse delle y, OM_y. Il cammino OM_y è stato percorso sotto l'influenza della velocità iniziale V_0, dunque:

$$(1)\quad y = V_0\, t.$$

Il cammino OM_x è stato percorso sotto l'influenza della gravità, dunque:

$$(2)\quad x = {}^1/_2\, g\, t^2$$

Eliminando t fra le equazioni (1) e (2) avremo l'equazione della curva cercata.

(1) dà $$t = \frac{y}{V_0}$$

E sostituendo a t il suo valore nell'equazione (2), viene:

$$x = {}^1/_2\, g\, \frac{y^2}{V_0^2},$$

oppure $$2\, V_0^2\, x = g\, y^2$$

$$y^2 = 2\, \frac{V_0^2}{g}\, x.$$

È l'equazione d'una parabola che ha per asse l'asse delle x e per vertice il punto O.

Per trovare la velocità V del corpo in un punto M della sua traiettoria vediamo che la velocità V_y della proiezione del punto sull'asse OY è:

$$V_y = V_0$$

e la velocità V_x della proiezione del punto sull'asse OX è

$$V_x = gt$$

avremo dunque:

$$V^2 = V_0^2 + g^2\, t^2$$

Da dove:

$$V = \sqrt{V_0^2 + g^2\, t^2}$$

L'accelerazione è qui eguale a g, ma applicando ciò che più sopra abbiamo esposto, possiamo trovare quest'accelerazione. Infatti

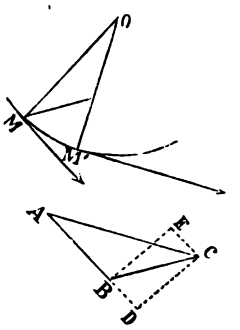
$$\frac{dV_y}{dt} = 0,$$

$$\frac{dV_x}{dt} = g.$$

Accelerazioni tangenziale e centripeta.

Abbiamo detto qui sopra che l'accelerazione totale può decomporsi in due.

Infatti, supponiamo nello spazio un corpo che percorre una certa traiettoria, e supponiamo che nel tempo dt abbia percorso



l'arco infinitamente piccolo MM'. Sia V la velocità in M, portiamo il suo valore sopra la tangente alla traiettoria in questo punto. Quando il mobile è giunto in M', la sua velocità avrà cambiato di grandezza e di direzione, sarà diretta secondo la tangente alla traiettoria in M' e porteremo il suo nuovo valore $V + dV$ su questa tangente.

Da un punto A dello spazio conduciamo AC ed AB parallele alle due tangenti alla traiettoria in M' ed in M, tali che si abbia:

$$AC = V + dV,$$
$$AB = V.$$

Congiungiamo i punti B e C. La retta BC chiamasi *la velocità elementare acquistata* nel tempo dt. Si può dunque dire che la *velocità* $V + dV$ *alla fine del tempo* dt *è la resultante geometrica*

della velocità V al principio del tempo dt e della velocità elementare acquistata in questo stesso tempo.

L'accelerazione totale è eguale al rapporto della velocità elementare acquistata al tempo dt, cioè J essendo quest'accelerazione totale

$$J = \frac{BC}{dt}.$$

Questo rapporto si rappresenta graficamente per mezzo di una lunghezza presa sopra una retta condotta dal punto *M* parallelamente a *BC*.

Il piano osculatore della curva essendo quello delle due tangenti infinitamente vicine, sarà parallelo al piano del triangolo *ABC;* se perciò conduciamo la normale alla traiettoria nel punto *M,* supponendo il centro di curvatura in *O,* potremo scomporre l'accelerazione totale secondo due direzioni; l'una sarà quella della tangente alla curva in *M,* l'altra quella della normale alla stessa curva e nello stesso punto. Invece di ciò possiamo scomporre *BC* secondo le due direzioni indicate, purchè si dividano per *dt* le componenti. Le direzioni indicate nel piano *ABC* sono *BD* e *BE*. Le componenti dell'accelerazione totale sono dunque $\frac{BD}{dt}$ e $\frac{BE}{dt}$.

Calcoliamo *BD* e *BE*.

Abbiamo sulla figura:

$$BD = AD - AB.$$

Chiamiamo $d\alpha$ l'angolo infinitamente piccolo *BAC*. Nel triangolo *ACD* abbiamo:

$$AD = AC \cos d\alpha.$$

Dunque:

$$BD = AC \cos d\alpha - AB.$$

Ma

$$AC = V + dV,$$

$$AB = V.$$

Ne risulta:

$$BD = (V + dV) \cos d\alpha - V.$$

L'angolo $d\alpha$ è infinitamente piccolo, il suo coseno può confondersi con l'unità; abbiamo allora:

$$BD = V + dV - V = dV.$$

Per avere la componente dell'accelerazione totale bisogna dividere i due membri dell'equazione per dt. Questa componente ha dunque per valore:

$$\frac{BD}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

e chiamasi *accelerazione tangenziale perchè diretta secondo la tangente alla traiettoria.*

Per calcolare BE abbiamo sulla figura:

$$BE = DC = AC \operatorname{sen} d\alpha = (V + dV) \operatorname{sen} d\alpha.$$

L'angolo $d\alpha$ essendo infinitamente piccolo, il suo seno può confondersi con l'arco, allora:

$$BE = (V + dV)\, d\alpha = V\, d\alpha + dV\, d\alpha.$$

Trascurando gl'infinitamente piccoli d'ordine superiore al primo

$$BE = V\, d\alpha$$

e la seconda componente ha per valore:

$$\frac{BE}{dt} = V \frac{d\alpha}{dt}.$$

Ma

$$d\alpha = ang\ MOM'$$

perchè questi due angoli hanno i loro lati rispettivamente perpendicolari, chiamando ρ il raggio di curvatura OM e ds l'arco MM, abbiamo:

$$ds = \rho\, d\alpha.$$

Da dove: $$d\alpha = \frac{ds}{\rho}.$$

Si può scrivere allora:

$$\frac{BE}{dt} = V.\ \frac{\frac{ds}{\rho}}{dt} = \frac{V}{\rho}\frac{ds}{dt}.$$

Ma $$\frac{ds}{dt} = V.$$

Dunque: $$\frac{BE}{dt} = \frac{V^2}{\rho}.$$

Questa componente chiamasi *accelerazione centripeta, perchè diretta secondo il raggio di curvatura* ρ.

Riassumendo, noi vediamo che l'accelerazione totale si può decomporre in due accelerazioni, l'una tangenziale e eguale a $\frac{dV}{dt}$, l'altra centripeta è eguale a $\frac{V^2}{\rho}$.

Se il moto del punto è rettilineo, il raggio di curvatura è infinito, l'accelerazione centripeta in questo caso si annulla e l'accelerazione totale è eguale all'accelerazione tangenziale.

Se si proietta ad ogni istante il moto di un punto sopra un asse, non solo la velocità della proiezione è eguale alla proiezione della velocità del punto nello spazio, ma bensì anche l'accelerazione totale della proiezione è eguale alla proiezione dell'accelerazione totale. Ciò non può applicarsi nè all'accelerazione centripeta nè all'accelerazione tangenziale perchè in generale un angolo retto non si proietta sopra un asse secondo un angolo retto.

Capitolo III.

Moto di un solido nello spazio.

Chiameremo *solido un sistema di punti che restano sempre ad una medesima distanza gli uni dagli altri, qualunque sia il moto del sistema nello spazio.*

Moto di traslazione.

Chiamasi così *un moto nel quale tutti i punti del corpo descrivono nello stesso istante dei cammini elementari eguali, paralleli e di medesimo senso.*

Moto di rotazione intorno ad una retta.

È *un moto nel quale tutti i punti del corpo descrivono nello spazio una circonferenza in un piano perpendicolare ad una retta che contiene il centro di questa circonferenza.*

Nello stesso tempo t, i raggi che vengono a terminarsi ai differenti punti del corpo descrivono lo stesso angolo e ciò chiamasi lo *spostamento angolare del corpo durante il tempo considerato.*

I punti situati a egual distanza dell'asse descrivono delle circonferenze eguali e come percorrono lo stesso angolo nello stesso tempo, gli spazi percorsi saranno eguali e le velocità saranno pure eguali in grandezza.

Se consideriamo un punto distante dall'asse della quantità 1 e se $d\theta$ è l'angolo di cui ha girato il corpo nel tempo dt, l'arco percorso in questo tempo sarà $d\theta$ e la velocità del punto sarà $\frac{d\theta}{dt}$; quest'espressione chiamasi *la velocità angolare del corpo.*

Se il corpo considerato è ad una distanza r dell'asse di rotazione, l'arco descritto nel tempo dt sarà $rd\theta$ e la velocità del punto sarà

$\frac{rd\theta}{dt}$; chiamando V questa velocità e ω la velocità angolare $\frac{d\theta}{dt}$, abbiamo per la velocità di un punto che è alla distanza r dell'asse di rotazione

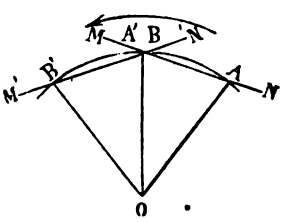
$$V = \omega r.$$

Moto parallelo ad un piano fisso.

Se consideriamo un piano parallelo ad un piano fisso e che incontri il corpo, la curva d'intersezione si muoverà sopra questo piano quando il corpo si muoverà nello spazio; ed il moto del corpo nello spazio sarà intimamente connesso con il moto di una curva piana mobile nel suo piano.

Centri istantanei di rotazione.

Sia una curva piana mobile nel suo piano ed una retta di questo piano invariabilmente collegata con la curva. La retta si muoverà con la curva ed il moto dello prima provocherà, nel piano ben inteso, il moto della seconda. Studiamo il moto della retta e sia MN una delle sue posizioni. Supponiamo che alla fine di un certo tempo sia venuta in $M'N'$ e sia A' il punto di MN che è venuto in A'



sopra $M'N'$, B' la nuova posizione del punto B che era sopra MN ed ora trovasi sopra $M'N'$. Abbiamo evidentemente:

$$A'B' = AB.$$

Dai tre punti A, B, B' facciamo passare una circonferenza di circolo. Chiamando α e $\grave{\alpha}$ gli angoli AOB, $A'OB'$, avremo:

$$\alpha = \grave{\alpha}$$

poichè $$A'B' = AB.$$

Se si fa girare la retta MN dell'angolo α intorno al centro O, il punto A verrà in A' ed il punto B in B', la retta MN prenderà la posizione $M'N'$.

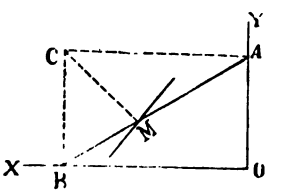
Dunque si può far passare la retta dalla sua posizione primitiva alla sua posizione finale facendola girare intorno al centro di rotazione O. Ciò può dirsi anche nel caso che lo spostamento della retta sia infinitamente piccolo. Per lo spostamento infinitamente piccolo seguente avremo un altro centro di rotazione, poi un terzo e così di seguito, ci serviremo di ognuno di questi centri per un tempo infinitamente piccolo; è perciò che chiamansi *centri istantanei di rotazione.*

La curva che abbiamo supposta invariabilmente connessa con la retta, girerà successivamente intorno ai medesimi centri istantanei, intorno ai quali ha girato la retta. Ogni punto della curva descriverà nel piano una certa traiettoria e come il moto di ciascuno di questi punti può essere ad ogni istante sostituito da una rotazione intorno ad un dato centro istantaneo, la normale della traiettoria passerà ad ogni momento per il centro istantaneo considerato. Dunque nello stesso momento le normali alle traiettorie di tutti punti della curva mobile passano dallo stesso centro istantaneo e la velocità di ogni punto nello stesso momento è proporzionale alla distanza di questo punto al centro istantaneo.

Questo teorema, ch'è dovuto a Giovanni Bernouilli, conduce ad un metodo per tracciare le tangenti ad alcune curve. Infatti il centro istantaneo di rotazione di una figura piana, mobile nel suo piano, non è il centro di curvatura delle traiettorie dei diversi punti della figura. Nel moto di rotazione elementare intorno ad un centro istantaneo, ogni punto descrive un elemento della sua traiettoria. La posizione del centro istantaneo di rotazione fa dunque soltanto conoscere la direzione della tangente alla traiettoria, senza nulla indicare relativamente alla sua curvatura.

Tangente all'ellissi.

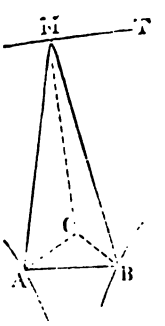
Sia una retta di lunghezza costante *AB*, le di cui estremità si appoggiano costantemente sopra due assi rettangolari *OX*, *OY*. Un punto *M* di questa retta *AB* descrive un' ellissi il di cui semi-asse



maggiore è *AM* ed il semi-asse minore *MB*. Per avere la tangente alla curva nel punto *M* vediamo che la retta *AB* si muove nel suo piano e che perciò la traiettoria del punto *A* è *OY*, quella del punto *B*, *OX* e quella del punto *M* un'ellissi. Ora nello stesso istante le normali a tutte le traiettorie di ogni punto passano dallo stesso centro istantaneo. Dunque la normale alla traiettoria del punto *A* essendo *AC*, la normale alla traiettoria del punto *B* essendo *BC*, la normale alla traiettoria del punto *M* sarà *CM* e per conseguenza la tangente richiesta sarà una perpendicolare in *M* ad *MC*.

Supponiamo ora che si voglia condurre la tangente ad una curva generata dal vertice d'un triangolo i di cui due altri vertici si appoggiano costantemente sopra due curve fisse.

Sia *ABM* il triangolo considerato. Per avere la tangente in *M*



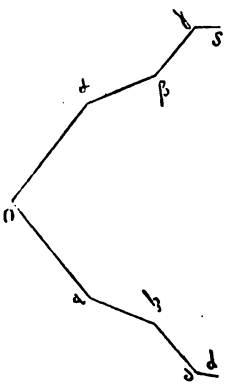
alla curva descritta da questo punto, vediamo che la normale alla traiettoria del punto *A* è *AC*, la normale alla traiettoria del punto

B è *BC*. Dunque nell'istante considerato la normale alla curva descritta dal punto *M* è *MC*, perciò la tangente richiesta sarà *MT* perpendicolare a *MC*.

Se invece di studiare il moto di una figura piana nel suo piano, studiamo il moto d'un solido qualunque che si muove parallelamente ad un piano fisso, faremo girare questo solido successivamente intorno ad una serie di assi perpendicolari al piano fisso e passanti da differenti centri istantanei. Questi assi si chiamano *assi istantanei di rotazione*.

Moto continuo di una figura piana nel suo piano.

Sia *O* il centro istantaneo di rotazione attuale, *a* un punto del piano che diventerà or ora centro istantaneo di rotazione, *b* un punto che succederà ad *a* come centro istantaneo e così i punti *c*, *d*, ecc.



L'insieme dei punti *a*, *b*, *c*, ecc., formerà una curva che sarà il luogo geometrico dei punti del piano destinati ad essere successivamente i differenti centri istantanei di rotazione. Sia α un punto che supponiamo intimamente collegato colla curva mobile e scelto in modo che dopo aver girato colla figura mobile intorno al punto *O* venga a coincidere con il punto *a* quando questo punto sarà diventato centro istantaneo di rotazione. Come pure, sia β un punto intimamente collegato con la curva mobile e che dopo aver girato intorno al centro istantaneo *O*, poi intorno al centro istantaneo *a*, verrà a coincidere con il punto *b* quando questo punto sarà diventato a sua volta centro

istantaneo di rotazione e così via di seguito per i punti γ, δ, ecc. L'insieme di tutti questi punti α, β, γ, δ, ecc., forma una curva mobile che sarà il luogo geometrico dei punti destinati a dover coincidere successivamente con i differenti centri istantanei.

Una rotazione infinitamente piccola intorno al punto O conduce il punto α sul punto a, l'angolo $\alpha\ O\ a$ è infinitamente piccolo, dunque le due curve sono tangenti fra loro.

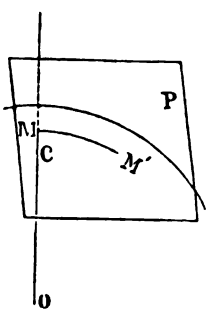
Dopo ciò che abbiamo detto, gli elementi della curva mobile devono essere eguali agli elementi della curva fissa. Dicesi allora che la *curva mobile ruzzola senza strisciare sulla curva fissa.*

Reciprocamente, se si fa ruzzolare senza strisciare la curva $O\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$... sulla curva $O\ a\ b\ c\ d$.... la figura mobile che abbiamo supposta intimamente collegata colla curva $O\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$.... prenderà nel suo piano precisamente il moto che doveva prendere.

Se si trattasse di un solido che si muove parallelamente ad un piano fisso, noi condurremmo dai punti O, a, b, c, d...., α, β, γ... delle perpendicolari al piano fisso ed otterremmo così due cilindri dei quali l'uno sarebbe fisso e l'altro mobile; collegheremmo invariabilmente il cilindro mobile con il solido facendo ruzzolare senza strisciare il cilindro mobile sopra il cilindro fisso, e il corpo solido prenderebbe nello spazio precisamente il moto che doveva prendere.

Moto intorno ad un punto fisso.

Se supponiamo un corpo che si muove intorno ad un punto fisso, i differenti punti di questo corpo si muoveranno sopra delle

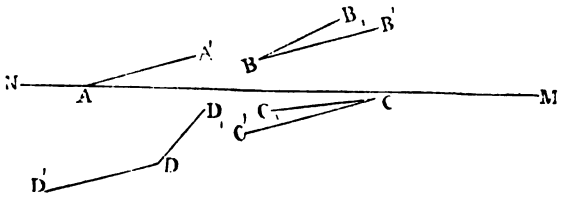


sfere che avranno per centro il punto fisso, poichè ogni punto deve restare continuamente ad una medesima distanza dal punto fisso.

Consideriamo la sfera sulla quale si muove il punto *M*. Questo punto percorre sulla sfera in un tempo infinitamente piccolo l'arco infinitamente piccolo *M M'*; quest'arco può essere considerato come se fosse nel piano tangente alla sfera nel punto *M*. Il moto elementare di detto punto si effettua dunque nel piano *P* e si può allora considerare il moto come avente luogo intorno ad un certo centro istantaneo *C* situato in questo piano; il punto *M* gira dunque nello stesso tempo intorno al punto *C* ed intorno al punto *O*, cioè intorno all'asse *OC*. Alla fine di un tempo infinitamente piccolo, l'asse *OC* sarà sostituito da un altr'asse che passerà sempre dal punto *O*. Dunque il moto di un corpo intorno ad un punto fisso può essere sostituito da una serie di rotazioni intorno ad assi istantanei che passano tutti dal punto *O*.

Moto qualunque d'un solido.

Qualunque sia il moto di un solido nello spazio, può cambiare di posizione se gli s'imprime prima un moto di traslazione, poi un moto di rotazione intorno ad un certo asse.



Siano infatti *A*, *B*, *C*, *D* alcuni punti del solido considerato nella sua posizione primitiva e supponiamo che alla fine di un tempo infinitamente piccolo *dt* ed in seguito ad un moto qualunque del solido, questi punti siano venuti in *A'*, *B'*, *C'*, *D'*. Conduciamo la retta *AA'*, dai punti *B*, *C*, *D* conduciamo delle rette eguali e parallele ad *AA'* e siano B_1B, CC_1, DD_1 queste rette. Tutti i punti considerati *A*, *B*, *C*, *D* essendo venuti in *A'*, B_1, C_1, D_1, ed i cammini percorsi da tutti questi punti essendo eguali e paralleli ad *AA'*, ne risulta che abbiamo dato al solido un moto di traslazione eguale e parallelo ad *AA'*. Il moto che ora deve condurre i punti B_1, C_1, D_1 in *B'*, *C'*, *D'* lascierà il punto *A'* fisso perchè questo punto occupa

già la sua posizione finale, e come gli altri punti del corpo restano a delle distanze costanti gli uni dagli altri, ne risulta che non potranno prendere altro che una rotazione intorno ad A': questa rotazione potrà essere sostituita, applicando il teorema precedente, da una rotazione intorno ad un asse istantaneo che passa dal punto A'. Sia MN quest'asse. Per condurre il solido dalla sua posizione iniziale alla sua posizione finale gli abbiamo dunque dato una traslazione parallela e eguale alla traslazione di uno dei suoi punti ed una rotazione intorno ad un asse istantaneo che passa da questo punto.

I due moti dati al solido possono effettuarsi in un'infinità di modi ed arriveremo sempre allo stesso resultato perchè il punto A essendo qualunque, invece di questo punto A avremmo potuto considerare un punto B, o C, o D, ecc. Però fra tutti questi sistemi di moti, uno ne esiste nel quale la traslazione si effettua parallelamente all'asse di rotazione.

Conduciamo infatti un piano P perpendicolare all'asse MN e supponiamo che questo piano P tagli il solido secondo la figura F. Nella traslazione parallela ad AA', il piano P verrà in P_1 e la figura F in F_1, e F_1 sarà l'intersezione del solido con il piano P_1. Diamo ora alla figura F_1 la rotazione intorno all'asse MN, questa figura girerà nel piano P_1 e verrà in F'. Ma per far passare la figura F dalla sua posizione iniziale alla sua posizione finale F' possiamo darle prima una traslazione parallela alla perpendicolare che misura la distanza dei piani P e P_1, poi farla girare in quest'ultimo piano intorno ad un punto convenientemente scelto; se si suppone il solido invariabilmente collegato con la figura F, vediamo che la successione dei due moti indicati lo condurrà dalla sua posizione iniziale alla sua posizione finale.

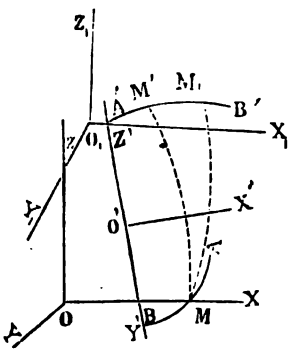
Dunque *un solido che si muove nello spazio in un modo qualunque, può passare da una ad un'altra posizione per mezzo di una traslazione e di una rotazione intorno ad un asse parallelo alla direzione della traslazione.*

Un corpo può trasportarsi da una posizione qualunque in un'altra pure qualunque per mezzo di una traslazione e di una rotazione; ma il moto del solido non consiste nella successione di questi due moti, descrive bensì degli elementi di elica; e dicesi che *il moto qualunque di un corpo può essere sostituito da una serie di moti elicoidali intorno ad assi convenientemente scelti.*

Capitolo IV.

Moti composti.

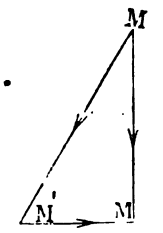
Quando un punto si muove nello spazio, si studia il suo moto relativamente a dei punti fissi. L'osservatore è generalmente supposto immobile, ma se si studia un moto relativamente a degli assi o a dei punti di paragone mobili, questo moto chiamasi *moto relativo* o *apparente*. Il moto degli assi o dei punti di paragone chiamasi *moto di traslazione*, ed infine il moto che si osserverebbe se i punti di paragone fossero fissi, chiamasi *moto assoluto*.



Siano OX, OY, OZ tre assi fissi, rettilinei, coordinati, relativamente ai quali studieremo il moto assoluto; $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$ tre assi mobili di medesima natura dei primi e relativamente ai quali studieremo il moto relativo; $o_1 x_1$, $o_1 y_1$, $o_1 z_1$ i tre assi $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$ in una seconda posizione.

Sia AB la traiettoria relativa del mobile nella sua prima posizione. Questa traiettoria sarebbe apparente per un osservatore posto sugli assi mobili. Sia M la posizione prima del mobile. Dopo un certo tempo gli assi mobili hanno preso la posizione $o_1 x_1$, $o_1 y_1$, $o_1 z_1$, la traiettoria AB trasportata con gli assi ha preso la posizione $A_1 B_1$ ed il punto M è venuto in M_1. Ma in questo tempo il mo-

bile si è mosso sulla sua traiettoria relativa percorrendo così un certo arco $M_1 M'_1$. Dunque nel tempo considerato, tre moti si sono effettuati. Uno spostamento MM_1 dovuto al moto di traslazione, uno spostamento $M_1M'_1$ dovuto al moto relativo ed uno spostamento $M M'_1$ dovuto al moto assoluto. Se si suppone il tempo infinitamente piccolo, questi tre moti saranno infinitamente piccoli e formeranno perciò un triangolo rettilineo. Dal senso dei lati di questo

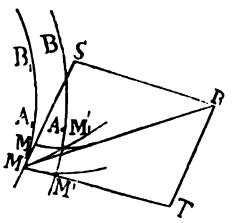


triangolo deduciamo che il lato MM'_1 è la resultante geometrica degli altri due lati. Dunque *lo spostamento elementare dovuto al moto assoluto è la resultante geometrica dello spostamento elementare dovuto al moto relativo e dello spostamento elementare dovuto al moto di traslazione;* e si può dire più semplicemente che *il moto assoluto è la resultante geometrica del moto relativo e del moto di traslazione.* I moti relativo e di traslazione chiamansi *moti componenti* ed il moto assoluto, *moto resultante.*

Le rette MM_1, $M'M_1$, M'_1M rappresentano gli spazi percorsi dal punto M sotto l'influenza dei differenti moti simultanei dai quali è animato.

Se costruiamo un triangolo simile al triangolo $MM_1M'_1$, dividendone tutti i lati per dt, otterremo le velocità dei tre moti. Si può dunque dire che *la velocità del moto assoluto è la resultante geometrica della velocità del moto relativo e della velocità del moto di traslazione.* Per trovare la velocità del moto relativo, bisognerebbe cambiare il senso del lato MM_1, ed allora $M_1M'_1$ sarebbe la risultante geometrica di M_1M e di MM'_1: e diremo che *il moto relativo è la resultante geometrica del moto di traslazione e del moto assoluto; il moto di traslazione essendo preso in senso contrario,* diremo pure che *la velocità del moto relativo è la resultante geometrica della velocità del moto assoluto e della velocità del moto di traslazione presa in senso contrario.*

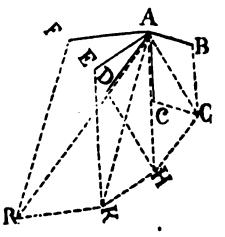
Prendiamo ora due posizioni infinitamente vicine della traiettoria relativa di un punto M e siano AB, A_1B_1 queste due posizioni. Nel tempo dt il punto M si muove sopra AB e viene in M_1, ma in questo stesso tempo la traiettoria AB viene in A_1B_1, per conseguenza il punto M_1 trovasi in M'_1 alla fine del tempo dt e MM'_1 è la traiettoria del movimento assoluto. Conduciamo MM' parallela alla traiettoria di traslazione $M_1M'_1$. La figura $MM'M'_1M_1$ è un parallelo-



grammo perchè i lati MM_1 e $M'M'_1$ essendo due posizioni infinitamente vicine di uno stesso elemento di traiettoria relativa AB e facendo perciò un angolo infinitamente piccolo fra loro, questi lati MM_1 e $M'M'_1$ devono essere considerati come eguali e paralleli. Si può dunque dire che lo spostamento assoluto MM'_1 del mobile per un tempo infinitamente piccolo dt è la diagonale del parallelogrammo che ha per lati lo spostamento relativo $MM_1 = M'M'_1$ e lo spostamento di traslazione $M_1M'_1 = MM'$. La velocità di un punto qualunque ad un istante qualunque è rappresentata da una lunghezza proporzionale al suo valore portata sulla tangente alla traiettoria nel punto considerato. Dunque conducendo le tangenti in M alla traiettoria relativa AB ed alla traiettoria di traslazione MM', portando sopra queste due tangenti delle lunghezze MS e MT proporzionali alle velocità del moto relativo e del moto di traslazione e costruendo sopra queste due rette un parallelogrammo $MSRT$, la sua diagonale MR sarà tangente alla traiettoria MM'_1 del moto assoluto e rappresenterà la sua velocità. Il parallelogrammo $MSRT$ chiamasi *parallelogrammo delle velocità*. Le rette MS e MT sono le *componenti* e la retta MR è la *resultante*.

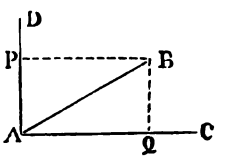
Nella costruzione del parallelogrammo delle velocità, non è nè utile, nè necessario il preoccuparsi quale sia la velocità relativa e quale quella di traslazione, poichè la velocità assoluta sarà sempre la loro resultante.

Supponiamo un punto animato da più moti. Si ottiene la sua velocità assoluta per mezzo delle velocità dei moti componenti, applicando a tutte queste velocità la costruzione del parallelogrammo delle velocità, come segue.



Siano *AB, AC, AD, AE, AF* le velocità del punto in ogni moto componente. La resultante di *AB* e *AC* è *AG*, la resultante di *AG* e *AD* è *AH*, quella di *AE* e *AH* è *AK* e quella di *AF* e *AK*, cioè la resultante di tutte le velocità date, è *AR*. Così operando abbiamo costruito un poligono nel quale *BG* è eguale e parallela a *AC*, *GH* eguale e parallela ad *AD*, *HK* eguale e parallela a *AE* e *KR* eguale e parallela ad *AF*. Dunque *per trovare la resultante di più velocità, dall'estremità di una di queste velocità condurremo una retta eguale e parallela alla velocità seguente, poi dall'estremità di questa parallela un'altra retta eguale e parallela all'altra velocità e così via di seguito per tutte le velocità date. Congiungeremo infine il punto di concorso di tutte le velocità con l'estremità dell'ultima parallela condotta e la retta così ottenuta sarà la resultante cercata. Il poligono formato chiamasi poligono delle velocità.*

Reciprocamente la velocità di un moto essendo data, potremo decomporla in due velocità componenti che saranno nello stesso piano della velocità resultante.



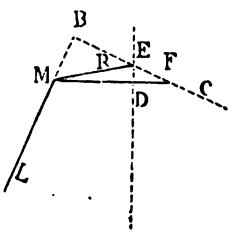
Sia la retta *AB* che rappresenta una velocità data e si voglia decomporre secondo le due direzioni *AC* e *AD*. Dal punto *B* si

condurrà *BP* parellela ad *AC* e *BQ* parallela ad *AD; AP* ed *AQ* saranno le componenti della velocità *AB* secondo le direzioni indicate *AC* ed *AD.*

La composizione delle velocità dà un metodo per condurre la tangente a certe curve. Questo metodo è conosciuto sotto il nome di *Metodo Roberval.*

Tangente all'ellissi.

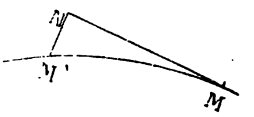
L'ellissi è una curva tale, che la somma delle distanze di ognuno dei suoi punti a due punti fissi è costante. Sia *M* un punto della curva ed *F* e *L* i due punti fissi. Supponiamo che il raggio vettore *FM* giri intorno al punto *F,* e supponiamo che il punto *M* appartenga esclusivamente ad *FM;* questo punto girerà dunque insieme al raggio vettore *FM.* La velocità del punto *M* può essere



decomposta in due: l'una secondo il raggio vettore e l'altra di traslazione. Lo stesso direbbesi se il punto *M* appartenesse esclusivamente al raggio vettore *LM* e se questo raggio vettore girasse intorno al punto *L.* Poichè la somma *MF* + *ML* è costante, ne risulta che le due velocità secondo i raggi vettori sono eguali e che se una è diretta secondo *FM,* l'altra sarà diretta secondo *ML.* Sia *MB* la velocità del punto *M* secondo il raggio vettore *FM;* se conoscessimo la velocità di traslazione, basterebbe portarla sulla perpendicolare ad *FMB* in *B* e di congiungere la sua estremità con *M.* Così *MD* essendo la velocità del punto *M* secondo *LM,* se conoscessimo la velocità di traslazione basterebbe portarla sulla perpendicolare a *LDM* in *D* e di congiungere la sua estremità con *M.* L'estremità della linea che rappresenta la velocità del punto *M* do-

vendosi trovare nello stesso tempo sopra *BC* e sopra *DE*, passerà dal punto *R* d'incontro di queste due rette.

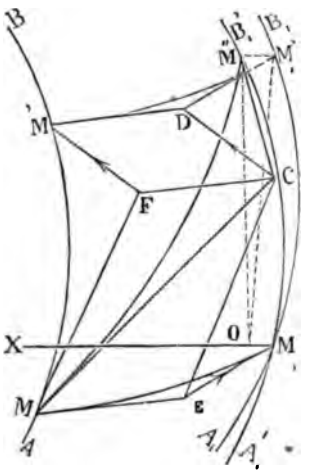
Oltre alle relazioni fra le velocità, ne esistono pure fra le accelerazioni totali nei moti assoluto, relativo e di traslazione. Sappiamo che in un moto qualunque, un mobile percorrendo la sua traiettoria, l'accelerazione totale del moto nel tempo considerato si ottiene portando sulla tangente alla traiettoria, nel punto corrispondente alla



posizione iniziale, una lunghezza $MM_1 = Vdt$ e si conduce la retta M_1M', il punto M' corrispondendo alla posizione finale del mobile sulla sua traiettoria; J essendo quest'accelerazione totale, essa ha per valore:

$$J = \frac{2\,M_1M'}{dt^2}.$$

Ciò posto, sia AB la traiettoria relativa del mobile nella sua posizione prima e sia M la posizione iniziale di questo mobile. Alla fine di un tempo infinitamente piccolo dt la traiettoria relativa si



è spostata ed ha preso la posizione $A'_1B'_1$; il punto M è venuto in M_1 percorrendo così in questo moto di traslazione la traiettoria MM_1. Questo moto di traslazione essendo qualunque, possiamo far passare la traiettoria relativa dalla sua posizione iniziale AB

alla sua posizione finale $A'_1B'_1$ per mezzo di una traslazione eguale e parallela a quella data al punto M e per mezzo di una rotazione intorno ad un asse che passa dalla posizione finale di questo punto M. La traslazione eguale e parallela ad MM_1 condurrà la traiettoria AB in A_1B_1 e la rotazione intorno all'asse X che passa dalla posizione finale M_1 del punto M la condurrà in $A'_1B'_1$. In questo stesso tempo infinitamente piccolo il punto M percorre sopra la sua traiettoria relativa un arco MM' ed in seguito alla traslazione il punto M' è venuto in M'_1, poi ha girato intorno all' asse X ed intorno ad un certo punto O di quest'asse percorrendo l'arco di circonferenza M'_1M''.

Chiamiamo V_r, V_t, V_a le velocità del moto relativo, del moto di traslazione e del moto assoluto. Portiamo sulla tangente nel punto M alla traiettoria relativa AB una lunghezza MF tale che

$$MF = V_r\ dt,$$

l'accelerazione totale relativa J_r è, conducendo FM

$$J_r = \frac{2\ FM'}{dt^2}.$$

Sulla tangente nel punto M alla curva MM_1 percorsa dal punto M nel moto di traslazione, prendiamo

$$ME = V_t\ dt,$$

l' accelerazione totale di traslazione J_t nel punto M è, conducendo EM_1

$$J_t = \frac{2\ EM_1}{dt^2}.$$

Sulle linee ME, MF costruiamo un parallelogrammo; la sua diagonale MC sarà la resultante geometrica di ME e di MF e come questi due lati sono rispettivamente eguali a $V_r\ dt$ ed a $V_t\ dt$, la loro resultante dovrà essere eguale a $V_a dt$, poichè le velocità V_r e V_t sono le componenti della velocità assoluta V_a; abbiamo dunque:

$$MC = V_a\ dt,$$

conducendo CM'', l'accelerazione totale assoluta Ja è:

$$J_a = \frac{2\ CM''}{dt^2}.$$

Per verificare ciò, MC essendo la direzione della velocità assoluta, dev'essere tangente in M a MM''. Se consideriamo la tangente nel punto M' alla curva $M'M''$, essa dovrà essere parallela a ME poichè nella traslazione tutti i punti della curva AB descrivono delle curve parallele. Costruiamo il parallelogrammo $M'DFC$, la linea CD sarà eguale e parallela a FM' e se conduciamo DM'_1, questa retta sarà eguale e parallela a EM_1. Nel quadrilatero CDM'_1M'' abbiamo:

$$CM'' = Res \begin{cases} CD \\ DM'_1 \\ M'_1 M'' \end{cases}$$

Ma CD è eguale e parallela a FM', DM'_1 è eguale e parallela a EM_1; dunque:

$$CM'' = Res \begin{cases} FM' \\ EM_1 \\ M'_1 M'' \end{cases}$$

Costruiamo un quadrilatero simile a quello considerato moltiplicandone tutti i lati per $\frac{2}{dt^2}$, avremo:

$$\frac{2\,CM''}{dt^2} = Res \begin{cases} \frac{2\,FM'}{dt^2} \\ \frac{2\,EM_1}{dt^2} \\ \frac{2\,M'_1 M''}{dt^2} \end{cases}$$

e come abbiamo già trovato

$$\frac{2\,CM''}{dt^2} = J_a, \quad \frac{2\,EM_1}{dt^2} = J_t, \quad \frac{2\,FM'}{dt^2} = J_r$$

avremo:

$$J_a = Res \begin{cases} J_r \\ J_t \\ \frac{2\,M'_1 M''}{dt^2} \end{cases}$$

Per calcolare l'espressione $\frac{2\,M'_1 M''}{dt^2}$ chiamiamo ω la velocità

angolare della rotazione intorno all'asse X nel tempo dt, l'arco percorso è:

$$M'_1 M'' = \omega dt \; OM'_1$$

L'arco $M_1M'_1$ essendo infinitamente piccolo, potrà confondersi con la sua tangente che è parallela a MF poichè la curva AB si è trasportata in A_1B_1 parallelamente a se stessa; dunque l'angolo $OM_1M'_1$ è eguale all'angolo che fa MF coll'asse X; sia α quest'angolo. L'angolo $M_1OM'_1$ è retto perchè il piano dell'arco M'_1M'' è perpendicolare all'asse X che è reciprocamente perpendicolare a tutti i raggi della circonferenza M'_1M''. Il triangolo $M_1OM'_1$ è dunque rettangolo in O, ed abbiamo:

$$OM'_1 = M_1 M'_1 \; sen \; \alpha.$$

Ma $$M_1 M'_1 = MM'$$

ed MM' può confondersi con FM sopprimendo gl'infinitamente piccoli d'ordine superiore al primo.

Ora sappiamo che

$$MF = V_r \, dt.$$

Dunque:

$$M_1 M'_1 = MM' = MF = V_r \, dt,$$

ed avremo:

$$OM'_1 = V_r \, dt \; sen \; \alpha,$$

$$M'_1 M'' = \omega \, dt \; V_r \, dt \; sen \; \alpha,$$

e $$\frac{2 M'_1 M''}{dt^2} = 2 \; \omega \; V_r \; sen \; \alpha.$$

Infine:

$$J_a = Res \begin{cases} J_r \\ J_t \\ 2 \, \omega \, V_r \, sen \, \alpha. \end{cases}$$

la quantità $2\omega V_r \ sen\ \alpha$ dovendo essere portata sopra M'_1M''. L'arco $M'M''$ è perpendicolare al raggio OM'_1 ed è pure perpendicolare al piano che passa dall'asse X e dalla retta MF. Questa terza componente di J_a chiamasi *accelerazione complementare.*

Possiamo dunque dire che *l' accelerazione totale nel moto assoluto è la resultante geometrica dell'accelerazione totale nel moto relativo, dell'accelerazione totale nel moto di traslazione e dell' accelerazione complementare* $2\omega V_r \ sen\ \alpha$, ω essendo la velocità angolare della rotazione intorno all' asse X ed α l' angolo che fa quest' asse con la direzione della velocità relativa del punto considerato, al principio del tempo dt. Per determinare la direzione dell' accelerazione complementare, sappiamo che è perpendicolare al piano che passa dall'asse X e dalla direzione della velocità relativa del punto al principio del tempo dt. Il senso nel quale debbesi considerare l' accelerazione complementare è quello nel quale girerebbe l' estremità di una retta eguale in lunghezza alla velocità relativa e condotta tangente in M_1 alla curva A_1B_1 intorno all'asse X.

Se come caso particolare supponiamo che il moto di traslazione abbia una traslazione, la rotazione intorno all' asse X sparisce, e perciò:

$$\omega = 0.$$

L' accelerazione complementare è annullata e lo sarà pure se il corpo è relativamente in riposo, poichè allora:

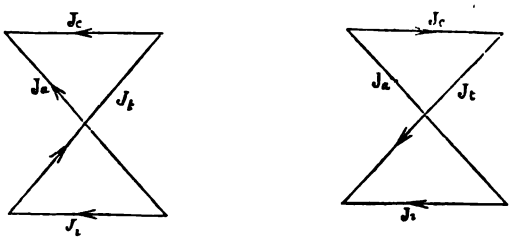
$$V_r = 0.$$

Infine l'accelerazione complementare è eguale a zero quando:

$$\alpha = 0.$$

Conoscendo l' accelerazione totale nel moto assoluto e nel moto di traslazione, se ne può dedurre l'accelerazione totale nel moto relativo. Sappiamo infatti che le tre accelerazioni J_a, J_t, J_r e l' accelerazione complementare J_c formano un quadrilatero nel quale J_a è la resultante geometrica. Per far sì che J_r sia resultante geometrica, bisogna cambiare il senso dell'accelerazione di traslazione

e dell'accelerazione complementare. Le due figure indicano bene i cambiamenti di senso.



Dunque *l'accelerazione totale nel moto relativo è la resultante geometrica dell'accelerazione totale nel moto assoluto, dell'accelerazione totale nel moto di traslazione presa in senso contrario e dell'accelerazione complementare presa essa pure in senso contrario.*

Sapendo che il moto assoluto di un corpo è la resultante geometrica del suo moto di traslazione e del suo moto relativo, siamo condotti, essendo conosciuti i differenti moti successivamente dati ad un corpo, a cercare il moto risultante.

Composizione di due traslazioni.

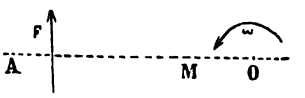
Il moto resultante è una traslazione perchè i moti componenti essendo due traslazioni, questi moti sono gli stessi per tutti i punti del corpo, perciò la resultante è pure la stessa per tutti questi punti ed il moto del corpo è una traslazione.

Composizione di una traslazione e di una rotazione.

Supponiamo prima di tutto che la traslazione sia perpendicolare all'asse di rotazione.

Prendiamo il piano della figura perpendicolare all'asse di ro-

tazione e sia il punto *O* il suo piede. Supponiamo che la traslazione abbia luogo parallelamente alla freccia *F* con una velocità *V*. Sia



ω la velocità angolare della rotazione. Dal punto *O* conduciamo una perpendicolare sulla direzione della traslazione e prendiamo su questa perpendicolare un punto *M* tale che

$$OM = \frac{V}{\omega};$$

facciamo di più in modo che il punto *M* occupi sulla perpendicolare alla direzione della traslazione una posizione tale, che se detto punto venisse trasportato nella rotazione, il senso del suo moto sia inverso di quello della traslazione.

Ciò premesso, dico che se si dà al punto *M* la traslazione *F* e la rotazione ω, questo punto *M* resta fisso. Infatti l'angolo percorso dal raggio *OM* in un tempo infinitamente piccolo *dt* è ω*dt* e perciò il punto *M* sotto l'influenza della rotazione ω si abbassa di una quantità $\omega dt \times OM$ al disotto di *OM* e per causa della traslazione *F* il punto *M* si alza al disopra di *OM* di una quantità *Vdt* e lo spazio percorso dal punto *M* è in realtà:

$$\omega\ dt \times OM - V\ dt.$$

Ma per ipotesi:

$$OM = \frac{V}{\omega}.$$

Dunque:

$$\omega\ dt \times \frac{V}{\omega} - V\,dt = 0.$$

Ciò vuol dire che il punto M resta realmente fisso. Questo essendo, nei due moti di traslazione e di rotazione tutti i punti del corpo considerato restano ad una distanza fissa dal punto M ed ogni punto di detto corpo descrive una circonferenza intorno al punto M. *Il moto resultante dai due moti dati è dunque una rotazione intorno ad un asse perpendicolare al piano della figura e passante pel punto* M.

Da ciò che precede deduciamo che il moto prodotto dalla rotazione intorno al punto M di un punto A qualunque è equivalente al moto che avrebbero impresso a detto punto A la rotazione ω e la traslazione F. Ora, se prendiamo un punto a sinistra del punto O, i due moti dati tendono a far salire questo punto, la rotazione resultante intorno al punto M deve essa pure tendere a farlo salire, questa rotazione dev'essere dunque diretta nello stesso senso della rotazione ω.

La rotazione ω fa scendere il punto A di una quantità $\omega dt \times OA$, la traslazione F lo fa salire della quantità Vdt, il punto A scende dunque realmente della quantità.

$$\omega dt \times OA - Vdt.$$

La rotazione resultante ω' fa scendere il punto A della quantità $\omega' dt \times AM$. Dobbiamo dunque avere:

$$\omega dt \times OA - Vdt = \omega' dt \times AM.$$

Sulla figura:

$$OA = OM + AM.$$

Ma $$OM = \frac{V}{\omega}.$$

Dunque abbiamo:

$$\omega dt \left(\frac{V}{\omega} + AM\right) - Vdt = \omega' dt \times AM,$$

oppure: $$Vdt + \omega dt \times AM - Vdt = \omega' dt \times AM.$$

Da dove: $$\omega dt \times AM = \omega' dt \times AM.$$

$$\omega = \omega'.$$

Dunque *la velocità angolare della rotazione resultante è eguale e di medesimo senso della rotazione data.*

Viceversa: *se un corpo ha un moto di rotazione intorno ad un asse M, questo moto può esser decomposto in una traslazione* F *ed in una rotazione* ω *intorno ad un asse parallelo all'asse della rotazione data, di medesimo senso e di medesima grandezza di quest'ultima, la traslazione essendo perpendicolare al piano dei due assi. Infine esiste sempre fra le velocità dei due moti e la distanza dei due assi la relazione*

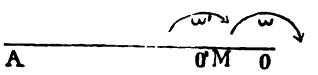
$$OM = \frac{V}{\omega}.$$

Supponiamo ora che la traslazione non sia perpendicolare all'asse della rotazione; in questo caso la decomporremo in due traslazioni, l'una parallela all'asse della rotazione, l'altra perpendicolare a quest'asse: quest'ultima traslazione si comporrà con la rotazione data per dare una rotazione unica intorno ad un asse *M* parallelo all'asse intorno al quale si effettua la rotazione data.

Avremo dunque come moto resultante *una rotazione intorno all'asse* M *ed una traslazione sopra quest'asse,* cioè un moto elicoidale.

Composizione di due rotazioni.

Supponiamo che le due rotazioni si effettuino intorno ad assi paralleli e siano di medesimo senso. Prendiamo il piano della figura perpendicolare a questi assi. *O* ed *O'* sono le intersezioni del piano



con gli assi. Chiamiamo ω ed ω' le velocità angolari delle due rotazioni date. Sulla linea *O O'* e fra i punti *O* ed *O'* prendiamo un punto *M* tale che:

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Dico che dando al punto *M* successivamente le rotazioni ω e ω', questo punto resterà fisso. Infatti, per causa della rotazione ω il

punto M si alzerà nel tempo dt di una quantità $\omega dt \times OM$ e per causa della rotazione ω' questo punto M si abbasserà nello stesso tempo dt di una quantità $\omega' dt \times O'M$. Lo spazio percorso dal punto M nel tempo dt è dunque

$$\omega dt \times OM - \omega' dt \times O'M.$$

Ma per ipotesi abbiamo:

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Da dove: $OM \times \omega = O'M \times \omega'$

e per conseguenza:

$$\omega dt \times OM = \omega' dt \times O'M.$$

Il punto M resta dunque fisso ed *il moto resultante è sempre una rotazione intorno ad un asse perpendicolare al piano della figura e passante dal punto* M. Questa rotazione deve sola produrre l'effetto delle due rotazioni date, cioè, il moto che ne risulta per il punto A, per esempio, dev' essere equivalente al moto impresso a questo punto dalle due rotazioni date. Queste due rotazioni tendono a far salire il punto A, la rotazione resultante deve essa pure far salire questo punto, dunque la rotazione resultante è del medesimo senso delle due rotazioni date. Per calcolare la velocità angolare ω'' della rotazione resultante, vediamo che la rotazione ω fa salire il punto A della quantità $\omega dt \times OA$, la rotazione ω' lo fa salire nello stesso tempo della quantita $\omega' dt \times O'A$; la rotazione ω'' lo farà salire della quantità $\omega'' dt \times AM$.

Dobbiamo dunque avere:

$$\omega dt \times OA + \omega' dt \times O'A = \omega'' dt \times AM.$$

Ma abbiamo sulla figura:

$$OA = OO' + O'A,$$

$$AM = O'M + O'A.$$

Dunque si può scrivere:

$$\omega dt\ (OO' + O'A) + \omega' dt \times O'A = \omega'' dt\ (O'M + O'A),$$

$$\omega dt \times OO' + \omega dt \times O'A + \omega' dt \times O'A = \omega'' dt \times O'M + \omega'' dt \times O'A.$$

Mettendo $O'A$ in fattor comune e dividendo i due membri dell'equazione per dt, si ottiene:

$$(\omega + \omega' - \omega'')\ O'A = \omega'' \times O'M - \omega \times OO'.$$

Ma per ipotesi abbiamo:

$$\frac{O'M}{OM} = \frac{\omega}{\omega'}.$$

E si può scrivere:

$$\frac{O'M}{OM + O'M} = \frac{\omega}{\omega' + \omega}.$$

Ma: $O'M + OM = OO'.$

Dunque: $\frac{O'M}{OO'} = \frac{\omega}{\omega' + \omega}.$

Da dove: $O'M\ (\omega + \omega') = OO' \times \omega.$

E l'equazione diventa allora, introducendovi il valore di $OO' \times \omega$,

$$(\omega + \omega' - \omega'')\ O'A = \omega'' \times O'M - O'M\ (\omega + \omega').$$

Oppure: $(\omega + \omega' - \omega'')\ O'A = (\omega'' - \omega - \omega')\ O'M,$

$$(\omega + \omega' - \omega'')\ O'A - (\omega'' - \omega - \omega')\ O'M = 0.$$

Mettendo $(\omega + \omega' - \omega'')$ in fattor comune, abbiamo prima di tutto:

$$(\omega + \omega' - \omega'')\ O'A = -(\omega + \omega' - \omega'')\ O'M.$$

Ed $(\omega + \omega' - \omega'')\ O'A + (\omega + \omega' - \omega'')\ O'M = 0.$

Cioè $(\omega + \omega' - \omega'')\ (O'A + O'M) = 0.$

Da dove: $\omega + \omega' - \omega'' = 0.$

Dunque: $\omega + \omega' = \omega''.$

La velocità angolare della rotazione resultante è eguale alla somma delle velocità angolari delle due rotazioni date.

Si può calcolare altrimenti la velocità angolare ω''. Abbiamo infatti come sopra:

$$\omega dt \times OA + \omega' dt \times O'A = \omega'' dt \times MA.$$

Oppure, dividendo i due membri dell'equazione per dt:

$$\omega \times OA + \omega' \times O'A = \omega'' \times MA.$$

Ma: $$O'A = AM - O'M$$

$$OA = OM + AM.$$

E l'equazione diventa:

$$\omega\,(OM + AM) + \omega'\,(AM - O'M) = \omega'' \times MA,$$

$$\omega \times OM + \omega \times AM + \omega' \times AM - \omega' \times O'M = \omega'' \times MA.$$

Per ipotesi, abbiamo:

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Da dove: $$OM \times \omega = O'M \times \omega'.$$

Ed allora:

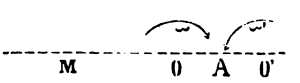
$$\omega \times AM + \omega' \times AM = \omega'' \times AM.$$

Ossia: $$\omega + \omega' = \omega''.$$

Supponiamo ora che le due rotazioni si effettuino in senso contrario, sempre però intorno ad assi paralleli.

Siano ω ed ω' le velocità angolari delle due rotazioni, e supponiamo:

$$\omega > \omega'.$$



Prendiamo un punto M al di fuori della retta OO' e dalla parte della rotazione che ha una velocità angolare maggiore.

Dico che il punto M resterà fisso se la condizione

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{\omega'}{\omega}$$

è sempre soddisfatta.

Infatti la rotazione ω tende a far salire il punto M d'una quantità $\omega dt \times OM$, la rotazione ω' tende a fare scendere questo punto M nello stesso tempo dt di una quantità $\omega' dt \times O'M$. Ora abbiamo:

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Cioè: $$\omega \times OM = \omega' \times O'M.$$

E $$\omega dt \times OM = \omega' dt \times O'M.$$

Il punto M resta dunque fisso.

Perciò *le due rotazioni possono essere sostituite da una rotazione unica intorno ad un asse parallelo agli assi delle due rotazioni date e passante pel punto M.* La rotazione resultante dovendo essa sola produrre l'effetto delle due rotazioni date per un punto qualunque A, questa rotazione unica fa scendere il punto A e perciò agisce nello stesso senso della rotazione che ha una velocità angolare maggiore.

Per causa della rotazione ω il punto A scende nel tempo dt di una quantità $\omega dt \times OA$, per causa della rotazione ω' questo stesso punto A scende nel tempo dt della quantità $\omega' dt \times O'A$. Il punto A per l'effetto delle due rotazioni date, scende dunque della quantità $\omega' dt \times O'A + \omega dt \times OA$. Ora la sola rotazione ω'' (ω'' essendo la velocità angolare della rotazione resultante), fa scendere il punto A della quantità $\omega'' dt \times AM$.

Dobbiamo dunque avere:

$$\omega dt \times OA + \omega' dt \times O'A = \omega'' dt \times AM.$$

Ma sulla figura:

$$OA = AM - OM$$
$$O'A = O'M - AM.$$

E l'equazione diventa, dividendone i due membri per dt:

$$\omega (AM - OM) + \omega' (O'M - AM) = \omega'' \times AM.$$

Oppure:

$$\omega \times AM - \omega \times OM + \omega' \times O'M - \omega' \times AM = \omega'' \times AM.$$

$$(\omega - \omega') AM - \omega \times OM + \omega' \times O'M = \omega'' \times AM.$$

Per ipotesi abbiamo:

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Da dove: $\omega \times OM = \omega' \times O'M.$

Dunque:

$$(\omega - \omega')\, AM = \omega' \times AM.$$

Cioè: $\omega - \omega' = \omega''.$

Dunque *la velocità angolare della rotazione resultante è eguale alla differenza delle velocità angolari delle due rotazioni date.*

Le due rotazioni essendo di senso contrario, se supponiamo come caso particolare

$$\omega = \omega',$$

l'asse della rotazione resultante si trova all'infinito. Infatti abbiamo:

$$\frac{OM}{O'M} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Da dove:

$$\frac{OM}{O'M - OM} = \frac{\omega'}{\omega - \omega'} = \frac{\omega'}{0} = \infty$$

Dunque se $\omega = \omega'$, OM è infinito e di più come abbiamo

$$\omega'' = \omega - \omega',$$

avremo: $\omega'' = 0.$

Si può concludere da tutto ciò che *due rotazioni che si effettuano intorno ad assi paralleli, in senso contrario e con delle velocità angolari eguali, hanno per resultante una rotazione unica che si effettua intorno ad un asse parallelo agli assi delle due rotazioni date, situato all'infinito e con una velocità angolare eguale a zero.*

Questi risultati non sono applicabili al caso considerato ed è d'uopo cercare direttamente la soluzione del problema.

Siano O ed O' i due assi. Noi sappiamo che una rotazione può essere sostituita da una rotazione intorno ad un asse parallelo all'asse della rotazione data e da una traslazione perpendicolare a

quest'asse. La velocità angolare della rotazione è eguale a quella della rotazione data e la velocità V della traslazione si ottiene conoscendo la distanza d degli assi e la velocità angolare ω della rotazione data,. poichè si ha:

$$d = \frac{V}{\omega}.$$

Ciò posto, sostituiamo alla rotazione ω intorno all'asse O una rotazione ω di medesimo senso intorno all'asse O' ed una traslazione perpendicolare a quest'asse, la di cui velocità V è data dalla relazione $d = \frac{V}{\omega}$.

Le due rotazioni date sono sostituite dai tre moti seguenti:

1° Una traslazione con una velocità V;

2° Una rotazione ω intorno all'asse O';

3° Una rotazione ω' intorno all'asse O';

Le due rotazioni ω e ω' che si effettuano intorno all'asse O' sono di senso contrario e di più, per ipotesi:

$$\omega = \omega.$$

Queste due rotazioni si distruggono e resta sola la traslazione di velocità V e che ha per valore:

$$V = \omega \times OO'.$$

Il senso della traslazione è dall'alto in basso, ce lo dimostra il moto che deve prendere il punto O.

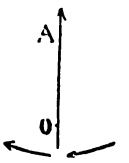
Se si avessero più rotazioni intorno ad assi paralleli, si comporrebbero successivamente tutte quelle che si effettuano nello stesso senso, poi tutte quelle che si effettuano in senso contrario e si comporrebbero infine le rotazioni finali così ottenute. Dunque *qualunque sia il numero delle rotazioni che si effettuano intorno ad assi paralleli e che dobbiamo comporre, ne risulta sempre una rotazione unica che si effettua intorno ad un asse parallelo agli assi delle rotazioni date e la di cui velocità angolare è eguale alla somma algebrica delle velocità angolari delle rotazioni date, prendendo positivamente le velocità delle rotazioni che si effettuano in un certo senso e negativamente quelle che si effettuano in senso contrario. Il segno della somma algebrica di tutte le velocità angolari prese con il loro segno indica il senso della rotazione re-*

sultante; se la somma di tutte queste velocità è eguale a zero, invece di una rotazione unica avremo una traslazione resultante.

Supponiamo ora che gli assi delle due rotazioni date non siano paralleli, ma bensì concorrenti. Occupiamoci in primo luogo degli

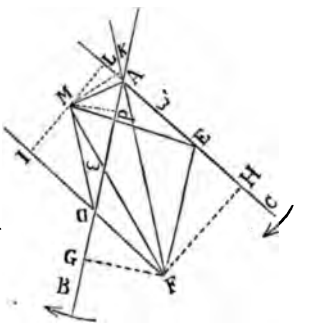
Assi rappresentativi di rotazione

Si conviene di rappresentare la grandezza ed il senso di una rotazione intorno ad un asse dato per mezzo di una retta. Perciò da un punto *O* qualunque preso sull'asse di rotazione, si porta una lunghezza *OA* da *O* verso *A* proporzionale alla velocità angolare della



rotazione ed in un senso tale che un osservatore posto sull'asse, l'occhio al punto *O* ed i piedi al punto *A* vede la rotazione effettuarsi da sinistra a destra. La linea retta *OA* chiamasi l'*asse rappresentativo della rotazione.*

Siano *AB*, *AC* due assi concorrenti, supponiamo che intorno a questi assi le rotazioni si effettuino da sinistra a destra e che gli assi rappresentativi siano *AD* e *AE*, *AD* essendo proporzionale alla velocità angolare ω della rotazione che si effettua intorno ad *AB* e *AE* essendo proporzionale alla velocità angolare ω' della rotazione che si effettua intorno ad *AC*.



Costruiamo il parallelogrammo *ADEF* e conduciamo *AF*. Dico che il punto *F* resta immobile. Infatti nel tempo infinitamente pic-

colo dt la rotazione ω fa descrivere al punto F un arco di circonferenza infinitamente piccolo di raggio FG e la di cui lunghezza è $\omega dt \times FG$. La rotazione ω' fa percorrere a questo stesso punto F e nello stesso tempo dt, un arco di circonferenza infinitamente piccolo di raggio FH e la di cui lunghezza è $\omega' dt \times FH$. Ora dico che

$$\omega dt \times FG = \omega' dt \times FH.$$

Infatti i due triangoli ADF, AEF sono eguali come metà del parallelogrammo $ADEF$. La superficie di ADF è:

$$sup.\ ADF = AD \times \frac{FG}{2} = \frac{\omega FG}{2}.$$

La superficie del triangolo AEF è:

$$sup.\ AEF = AE \times \frac{FH}{2} = \frac{\omega' FH}{2}.$$

I due triangoli ADF ed AEF essendo eguali, le loro superfici sono pure eguali; dunque:

$$\frac{\omega FG}{2} = \frac{\omega' FH}{2};$$

moltiplicando i due membri dell'equazione per $2\,dt$ si viene ad ottenere:

$$\omega dt \times FG = \omega' dt \times FH.$$

Il punto F non si muove, il punto A è pure fisso; dunque la retta AF è fissa e *le due rotazioni date possono essere sostituite da una rotazione unica intorno ad AF*. Sia ω'' la velocità angolare di questa rotazione resultante; possiamo dire che per un punto qualunque lo spazio percorso in seguito alla rotazione ω'' è equivalente agli spazi percorsi per causa delle rotazioni ω e ω'; e poichè ciò dev'esser vero per un punto qualunque applichiamolo al punto M. Da questo punto M abbassiamo delle perpendicolari ML, MK, MP sopra i tre assi. In seguito alla rotazione ω e nel tempo dt il punto M si sposterà della quantità $\omega\ dt \times MP$. Per causa della rotazione ω' questo punto M si sposterà della quantità $\omega' dt \times ML$ ed infine per causa della rotazione ω'' il punto M si sposterà della

quantità $\omega'' dt \times MK$ e quest'ultima rotazione sarà di medesimo senso delle due rotazioni date. Dobbiamo dunque avere:

$$\omega dt \times MP + \omega' dt \times ML = \omega'' dt \times MK.$$

Ossia: $$\omega \times MP + \omega' \times ML = \omega'' MK.$$

Conduciamo le rette MA, MD, ME, MF. Prolunghiamo DF fino al punto I dove incontra la retta ML prolungata. La superficie del triangolo AME è:

$$sup.\ AME = \frac{1}{2} ML \times AE.$$

Ma per ipotesi: $$AE = \omega'.$$

Dunque: $$sup.\ AME = \frac{1}{2} ML \times \omega'.$$

Sulla figura abbiamo:

$$ML = IL - IM$$

e $$\frac{1}{2} \omega' \times ML = \frac{1}{2} \omega' (IL - IM) = \frac{1}{2} \omega' \times IL - \frac{1}{2} \omega' \times IM.$$

Ma

$$DF = AE = \omega'.$$

Dunque: $$\frac{1}{2} \omega' \times IM = sup.\ MDF$$

e per conseguenza: $\omega' \times IL$ è la superficie del parallelogrammo $ADEF$ e si può scrivere:

$$\frac{1}{2} \omega' \times IL = sup.\ ADF.$$

Abbiamo dunque:

$$\frac{1}{2} \omega' ML = sup.\ ADF - sup.\ MDF.$$

Ma abbiamo pure:

$$sup.\ AMD = \frac{1}{2}\ AD \times MP = \frac{1}{2}\ \omega \times MP.$$

Da queste due ultime equazioni deduciamo

$$\frac{1}{2}\ (\omega' ML + \omega MP) = sup.\ ADF - sup.\ MDF + sup.\ AMD.$$

Cioè: $$\frac{1}{2}\ (\omega' \times ML + \omega \times MP) = sup.\ AFM.$$

Ma: $$sup.\ AFM = AF \times \frac{1}{2}\ MK.$$

Dunque:

$$\omega' ML + \omega MP = AF \times K.$$

Avevamo:

$$\omega' ML + \omega MP = \omega'' MK.$$

Ne risulta: $$AF = \omega''.$$

Dunque *due rotazioni intorno ad assi concorrenti possono essere sostituite da una sola rotazione, l'asse rappresentativo della rotazione resultante sarà la resultante geometrica degli assi rappresentativi delle due rotazioni componenti. Se si avessero più di due rotazioni intorno ad assi concorrenti, si comporrebbero successivamente due a due fino a che non si avesse una sola rotazione; l'asse rappresentativo di questa sola rotazione sarebbe la resultante geometrica degli assi rappresentativi di tutte le rotazioni componenti.*

Supponiamo che i due assi di rotazione non siano nello stesso piano. In questo caso una delle due rotazioni che si effettua intorno ad uno degli assi dati potrà essere sostituita da una rotazione intorno ad un asse parallelo all'asse considerato, scelto in modo che incontri l'altr'asse e da una traslazione perpendicolare a quest'asse. Comporremo in una sola le due rotazioni che si effettuano intorno ad assi concorrenti ed il moto resultante sarà *una rotazione ed una traslazione, cioè un moto elicoidale determinato.*

Composizione di due moti qualunque.

Sappiamo che un moto qualunque di un corpo solido può essere sostituito da una rotazione e da una traslazione. I due moti dati sono dunque equivalenti a due rotazioni ed a due traslazioni.

Le due rotazioni possono essere sostituite da una sola rotazione e da una traslazione; avremo dunque una rotazione e tre traslazioni, ma a loro volta le tre traslazioni possono comporsi in una sola, *ed il moto resultante di due moti qualunque sarà composto di una rotazione e di una traslazione; sarà cioè un moto elicoidale.* Il moto resultante sarebbe egualmente un moto elicoidale se si avessero da comporre più di due moti qualunque.

Spesse volte è necessario sostituire al moto qualunque di un corpo solido dei moti intorno agli assi coordinati o parallelamente a questi assi. Ora, qualunque sia il moto del corpo possiamo sostituirgli un moto elicoidale, cioè una traslazione ed una rotazione intorno ad un asse determinato. Sostituiremo alla rotazione intorno all'asse, una rotazione intorno ad un asse parallelo al primo e passante dall' origine delle coordinate: avremo allora sostituito al moto qualunque dato, una rotazione intorno ad un asse che passa dall' origine delle coordinate e due traslazioni che possiamo comporre in una sola. La rotazione potrà essere sostituita da tre rotazioni intorno ai tre assi coordinati e la traslazione da tre traslazioni parallele a questi tre assi.

Se si studia il moto relativo di un corpo relativamente ad un altro, invece di servirsi dell' intermediario del moto assoluto e del moto di traslazione potremo operare altrimenti. Se si dà simultaneamente ai due corpi uno stesso moto comune, il moto di un corpo relativamente all' altro non cambierà. Se cambiamo il moto di uno dei corpi in modo che sia continuamente eguale e opposto al moto comune dato ai due corpi insieme, questo corpo resterà fisso ed il moto dell' altro corpo relativamente al primo sarà diventato un moto assoluto; il moto dell'altro corpo sarà la resultante geometrica del suo moto assoluto e del moto conosciuto che gli abbiamo dato.

Studiamo ora il moto di due corpi che si toccano.

Quando due corpi sono in contatto, distingueremo due casi.

I due corpi hanno sempre un sol punto comune.

I due corpi hanno più punti comuni nello stesso tempo.

Nel primo caso il moto dei due corpi può rientrare in una delle cinque categorie seguenti.

1° Moto intorno ad un perno.
2° Ruzzolamento semplice.
3° Sdrucciolamento semplice.
4° Ruzzolamento misto o tangenziale.
5° Sdrucciolamento misto o angolare.

Volendo studiare il moto relativo, supporremo che uno dei corpi dati è fisso.

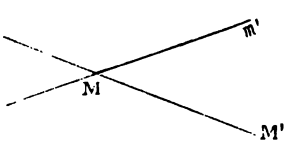
Moto intorno ad un perno.

Dicesi che un corpo si muove intorno ad un perno quando il punto di contatto fra i due corpi resta sempre lo stesso. Il moto elementare del corpo mobile è perciò il moto di un solido che ha un punto fisso, cioè *una rotazione intorno ad un asse istantaneo che passa sempre dal punto fisso.*

Ruzzolamento semplice.

Dicesi che vi è ruzzolamento semplice quando i due corpi restano sempre in contatto l'uno con altro, il punto di contatto variando continuamente sopra i due corpi ed infine gli spazi elementari percorsi dal punto di contatto del corpo mobile essendo eguali agli spazi elementari percorsi dal punto di contatto del corpo supposto fisso.

Sia M il punto di contatto attuale dei due corpi, M' il punto



di contatto seguente del corpo supposto fisso ed m' il punto di contatto corrispondente del corpo mobile.

Bisogna che per causa del moto elementare l'elemento Mm' venga

a coincidere con l'elemento MM' e questo moto elementare dev'essere una rotazione intorno al punto M, poichè per ipotesi:

$$MM' = Mm'.$$

Dunque *nel ruzzolamento semplice il moto elementare è una rotazione intorno al punto di contatto attuale.* L'arco $M'm'$ essendo un infinitamente piccolo del second' ordine, ne resulta che la velocità con la quale si muove il punto m' è un infinitamente piccolo del prim' ordine.

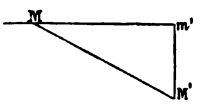
Sdrucciolamento semplice.

Dicesi che vi è sdrucciolamento semplice allorchè il punto di contatto è fisso sopra l' uno dei due corpi e variabile nell' altro. In questo caso chiamasi *sdrucciolamento elementare l'arco infinitamente piccolo percorso dal punto di contatto del corpo mobile sopra il corpo supposto fisso* e la velocità dello sdrucciolamento, ds essendo lo spazio percorso, è $\frac{ds}{dt}$.

Ruzzolamento misto o tangenziale.

I due corpi restano continuamente in contatto fra loro ed i punti di contatto variano sopra ambedue i corpi ma lo spazio elementare percorso dal punto di contatto del corpo mobile non è eguale allo spazio percorso dal punto di contatto del corpo supposto fisso.

Sia per esempio il punto m' del corpo mobile che deve coin-



cidere con il punto M' del corpo supposto fisso. Siano ds e ds' gli spazi percorsi dai due punti di contatto. L'angolo $M'Mm'$ è infinitamente piccolo poichè i due corpi sono tangenti. Dunque lo spazio $M'm'$ percorso dal punto di contatto del corpo mobile sarà

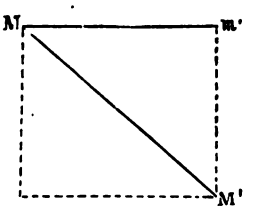
eguale, non occupandoci degl'infinitamente piccoli d'ordine superiore al primo, alla differenza ds-ds' e la velocità di sdrucciolamento V_s avrà per valore:

$$V_s = \frac{ds - ds'}{dt} = \frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt}.$$

Questa velocità è eguale alla differenza delle velocità con le quali si spostano i due punti di contatto sopra i due corpi.

Sdrucciolamento misto o angolare.

Supponiamo qui che i due punti di contatto variino sopra i due corpi che non saranno più tangenti, gli spazi percorsi dai punti di



contatto sopra i due corpi non sono eguali, l'angolo $M'Mm'$ non è più infinitamente piccolo e lo spostamento elementare $m'M'$ avrà per espressione:

$$m'M' = \sqrt{ds^2 + ds'^2 - 2\,ds\,ds'\cos(ds, ds')}$$

e la velocità di sdrucciolamento V_s avrà per valore:

$$V_s = \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 - 2\,\frac{ds}{dt}\,\frac{ds'}{dt}\cos(ds, ds')}.$$

Supponiamo ora che i due corpi abbiano insieme più punti di contatto.

Se avviene che alcuni punti di contatto del corpo mobile ab-

biano un moto di rotazione intorno ad un certo asse istantaneo ne vien di conseguenza che tutti i punti del corpo mobile dovranno girare intorno a quest'asse; se alcuni di questi punti sono sull' asse stesso, in questi punti il moto relativo dei due corpi è un ruzzolamento semplice, se sull'asse vi sono un'infinità di punti di contatto, quest'asse sarà una generatrice comune dei due corpi che saranno due superfici regolate e ruzzoleranno l'una sull'altra senza sdrucciolare.

DINAMICA DI UN PUNTO MATERIALE

Capitolo I.

Azione e composizione delle forze applicate ad un punto materiale.

Chiamasi *punto materiale un punto nel quale si suppone condensata tutta la materia del corpo di cui si studia il moto.* Dicesi altrimenti che il punto materiale *è l'insieme dei punti geometrici tali che essendo in moto, tutte le traiettorie descritte da questi punti si confondono in una sola.*

La causa che modifica lo stato di moto o di quiete di un corpo chiamasi *forza.*

Una forza è completamente determinata quando si conosce il suo *punto d'applicazione, la sua direzione, il suo senso* e la *sua intensità.*

Chiamasi punto d'applicazione di una forza *il punto materiale sul quale agisce,* la sua direzione è *la retta secondo la quale farebbe muovere il corpo al quale è applicata se agisse sola* ed il suo senso è *il senso nel quale si muove il corpo.* Una forza si rappresenta graficamente per mezzo della sua direzione ed il suo senso è indicato con una freccia posta su questa direzione.

L'intensità della forza *è la sua grandezza paragonata all'unità,* quest'intensità si rappresenta per mezzo di una lunghezza che le è proporzionale e che si porta sulla retta che indica la direzione ed il senso della forza.

Chiamasi *resultante* di due o più forze (*componenti*) *la forza unica che sola produce l'effetto delle forze date. L'intensità della resultante è eguale alla somma dell'intensità delle componenti.*

Due o più forze sono eguali fra loro quando *applicate successivamente e nelle stesse condizioni ad uno stesso punto materiale, producono lo stesso effetto.*

Lo studio delle relazioni esistenti fra il moto di un corpo e le cause che lo determinano o lo modificano può effettuarsi indifferentemente sopra un punto materiale, o sopra un solido qualunque; cominceremo da stabilire le leggi della dinamica per un punto materiale e passeremo quindi ai solidi o sistemi di punti materiali.

Quattro principj fondamentali sono indispensabili per stabilire le leggi della dinamica. Questi principj che or ora enunceremo non sono evidenti a priori; è osservando i fenomeni della natura che essi sono stati scoperti. La più bella prova che essi esistono è l'esattezza delle conseguenze dedotte da una serie di ragionamenti fatti appoggiandosi sopra di loro.

Primo principio — Inerzia della materia.

Un punto materiale non può passare da se stesso dallo stato di riposo allo stato di moto. Quando è in moto, non può da sè modificare il suo stato di moto; di modo che se nessuna causa esterna agisce sopra di esso, la sua velocità sarà sempre la stessa in grandezza ed in direzione; perciò il suo moto sarà uniforme.

Secondo principio o principio di Newton.
Azione e reazione.

Una forza qualunque applicata al punto A proviene da un punto B ed è diretta secondo BA. Nello stesso tempo una forza qualunque applicata al punto B proviene dal punto A ed è diretta secondo AB. Queste due forze che chiamansi *l'azione e la reazione* sono eguali fra loro, hanno la stessa direzione AB e sono di senso contrario. Più brevemente. *L'azione è eguale e direttamente opposta alla reazione.*

Le due forze applicate ai punti A e B, se di senso opposto quando si considerano simultaneamante, possono essere di senso qualunque quando si considerano isolatamente e tali per esempio che tendano ambedue ad avvicinare i punti A e B fra di loro; in questo caso le due forze chiamansi *attrattive*, nel caso contrario chiamansi *repulsive.*

Terzo principio.

L'effetto prodotto da una forza sopra un punto materiale è indipendente dal moto anteriormente acquistato da questo punto.

Quarto principio.

Quando più forze agiscono simultaneamente sopra uno stesso punto materiale, ognuna di esse produce lo stesso effetto come se fosse sola.

Punti materiali eguali.

Due punti materiali sono eguali *quando sollecitati da forze eguali prendono le stesse accelerazioni, qualunque sia lo stato fisico dei corpi.*

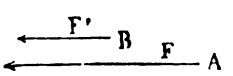
Teorema.

Due forze costanti in intensità ed in direzione stanno fra loro come le accelerazioni che produrrebbero se fossero applicate a due punti materiali eguali.

Siano due forze F e F' non eguali ma costanti in intensità ed in direzione, siano applicate ai due punti materiali eguali A e B. Sia f l'unità di forza in modo che:

$$F = nf,$$

$$F' = n'f.$$



Sia J l'accelerazione che fa prendere al punto A o B la forza f quando agisce sola e V la velocità del moto prodotto da questa stessa forza f.

In virtù del terzo principio, se sotto l'influenza della forza f la velocità del moto prodotto è V, sotto l'influenza della forza

$2\,f$ sarà $$V + V = 2\,V,$$

sotto l'influenza della forza

$3\,f$ $$V + V + V = 3\,V$$

e sotto l'influenza della forza

$n\,f$ $$V + V + V + V + \ldots\ldots = n\,V.$$

L'accelerazione J del moto prodotto dalla forza f sarà

$$J = \frac{dV}{dt}$$

ed operando per l'accelerazione come abbiamo operato per la velocità, troveremo che l'accelerazione J_n del moto prodotto dalla forza nf è

$$J_n = \frac{d\,(n\,V)}{dt}.$$

Ma n è una costante, dunque,

$$\frac{d\,(nV)}{dt} = n\,\frac{dV}{dt} = nJ$$

e $$J_n = nJ.$$

Troveremmo egualmente:

$$J_n' = n'J.$$

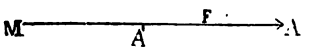
Dunque possiamo scrivere:

$$\frac{F}{F'} = \frac{nf}{n'f} = \frac{nJ}{n'J} = \frac{J_n}{J_n'}.$$

Teorema.

Un punto materiale sollecitato da una forza variabile che agisce nel senso della velocità, acquista ad un istante qualunque

delle accelerazioni proporzionali all' intensità della forza nell' istante considerato.



Supponiamo una forza F variabile applicata al punto M è diretta secondo MA che è pure la direzione della velocità. Sia F l'intensità della forza nel momento considerato, cioè quando il mobile è in M, V la velocità acquistata in questo punto e J l'accelerazione corrispondente. Prendiamo un punto A' vicinissimo ad M. Nel tempo che il mobile ha percorso lo spazio MA' la forza F è diventata $F+\Delta F$, ma possiamo supporre il tempo impiegato per percorrere MA' abbastanza piccolo per poter ammettere che in tutto questo tempo, ΔF non ha cambiato di segno. Supponiamo per esempio $\Delta F > 0$. Alla fine del tempo Δt la velocità V è diventata $V+\Delta V$ e l'accelerazione J ha preso un nuovo valore J_1. Le accelerazioni sono proporzionali alle forze, dunque:

$$\frac{F}{F+\Delta F} = \frac{J}{J_1}.$$

Da dove:

$$FJ_1 = J\,(F+\Delta F),$$

$$J_1 = J\left(1+\frac{\Delta F}{F}\right)$$

Tale sarebbe il valore dell'accelerazione J_1 se la forza F avesse ricevuto un accrescimento costante in tutto il tempo Δt ma in realtà l'accrescimento ΔF è stato aggiunto alla forza F poco a poco e l'accrescimento medio dell'accelerazione sarà maggiore dell'accelerazione J al principio del tempo Δt e minore dell'accelerazione J_1 alla fine di questo stesso tempo. Abbiamo cioè:

$$J < \frac{\Delta V}{\Delta t} < J_1.$$

Oppure sostituendo a J_1 il suo valore:

$$J < \frac{\Delta V}{\Delta t} < J\left(1+\frac{\Delta F}{F}\right).$$

Ciò essendo vero qualunque sia la lunghezza del tempo Δt, avremo:

$$lim\ J < lim\ \frac{\Delta V}{\Delta t} < lim\ J\left(1 + \frac{\Delta F}{F}\right).$$

Ma J è una costante, perciò:

$$lim\ J = J,$$

$$lim\ \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

$$lim\ \frac{\Delta F}{F} = 0.$$

Abbiamo dunque:

$$lim\ J\left(1 + \frac{\Delta F}{F}\right) = J$$

perchè più ΔF diminuisce, più la frazione $\frac{\Delta F}{F}$ diminuisce e si può a un momento dato non tenerne conto davanti all'unità.

Dunque al limite troviamo che l'accelerazione $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ non è altro che J, ciò che bisognava dimostrare.

Teorema.

Quando un punto materiale parte dal riposo, le forze che gli si applicano sono proporzionali alle velocità del moto acquistato da questo punto.

Siano F ed F' due forze applicate ad uno stesso punto materiale e siano J e J' le accelerazioni prodotte. Sappiamo che

$$\frac{F}{F'} = \frac{J}{J'}.$$

Chiamiamo V e V' le velocità prodotte dalle due forze F e F'; il mobile partendo dal riposo, avremo:

$$V = Jt,$$

$$V' = J't.$$

Dividendo queste due equazioni membro a membro;

$$\frac{V}{V'} = \frac{J}{J'}.$$

Ciò che dà:

$$\frac{V}{V'} = \frac{J}{J'} = \frac{F}{F'}.$$

Massa dei corpi.

Due corpi hanno la stessa massa quando sono eguali sotto il rapporto dinamico, cioè *quando sottomessi a forze eguali, prendono delle accelerazioni eguali. Due corpi sono ineguali quando sottomessi all'azione di forze eguali prendono delle accelerazioni ineguali.*

Le masse dei corpi sono dunque *quantità proporzionali alle forze necessarie per imprimere a questi corpi dei moti aventi delle accelerazioni eguali nel tempo considerato.*

Supponiamo sia m la massa del corpo A che sotto l'influenza della forza Φ prende l'accelerazione J_1 e sia m_1 la massa del corpo B che sotto l'influenza della forza Φ_1 prende l'accelerazione J_1. Abbiamo per dimostrazione

$$\frac{J_1}{J_1} = \frac{\Phi}{\Phi_1}.$$

Sia F una forza che agisce sul punto A producendo una accelerazione J. Se supponiamo la forza F costante, l'accelerazione J sarà essa pure costante poichè è proporzionale alla forza F e perciò il quoziente $\frac{F}{J}$ sarà pure costante.

Sia F_1 una forza costante che agisce sul punto B producendo un'accelerazione J_2. Il quoziente $\frac{F_1}{J_2}$ sarà costante come il quoziente $\frac{F}{J}$, ed in generale queste due quantità saranno differenti l'una dall'altra. Avremo:

$$\frac{F}{\Phi} = \frac{J}{J_1} \text{ oppure, } \frac{F}{J} = \frac{\Phi}{J_1}.$$

Come pure:

$$\frac{F_1}{\Phi_1} = \frac{J_2}{J_1} \text{ oppure, } \frac{F_1}{J_2} = \frac{\Phi_1}{J_1}.$$

E dividendo membro a membro:

$$\frac{\frac{F}{\Phi}}{\frac{F_1}{\Phi_1}} = \frac{J}{J_2} \text{ oppure, } \frac{\frac{F}{J}}{\frac{F_1}{J_2}} = \frac{\Phi}{\Phi_1} = \frac{m}{m_1} \qquad (\alpha).$$

Quest'equazione (α) è la relazione fondamentale fra le masse dei corpi, le forze che loro sono applicate e le accelerazioni che ne risultano.

Sappiamo che i quozienti $\frac{F}{J}$ e $\frac{F_1}{J_2}$ sono costanti; possiamo dunque scrivere:

$$\frac{F}{J} = C_1, \quad \frac{F_1}{J_2} = C_2.$$

Dividendo queste due equazioni membro a membro, otteniamo:

$$\frac{\frac{F}{J}}{\frac{F_1}{J_2}} = \frac{C_1}{C_2} = C.$$

Unità di massa.

Si prende per unità di massa, *la massa di un corpo che sotto l'influenza dell'unità di forza riceverebbe l'unità d'accelerazione.*

Se m è la massa di un corpo, F la forza che lo sollecita e J l'accelerazione che ne risulta, avremo:

$$\frac{m}{1} = \frac{\frac{F}{J}}{\frac{1}{1}} = \frac{F}{J},$$

$$m = \frac{F}{J} \qquad (\beta).$$

Abbiamo così una relazione fra la massa di un corpo, la forza che lo sollecita e l'accelerazione che ne deriva.

L'equazione (β) non è omogenea perchè m rappresenta il quoziente d'una forza e d'un'accelerazione, quantità di natura affatto differenti e perciò non omogenee. Perchè la formula sia omogenea bisogna risalire all'equazione (α) dalla quale poi deduciamo la formula (β).

L'equazione (β) ci dà:

$$J = \frac{F}{m}.$$

L'accelerazione è il quoziente della forza per la massa. Introducendo questo valore di J nelle tre formule del movimento variato (vedi cinematica), si ottiene:

(1) $$\frac{dv}{dt} = J = \frac{F}{m},$$

(2) $$\frac{ds}{dt} = V = V_0 + Jt = V_0 + \frac{F}{m}t,$$

(3) $$s = s_0 + V_0 t + \frac{1}{2} Jt^2 = s_0 + V_0 t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

Teorema.

Le forze sono proporzionali ai prodotti delle masse per le accelerazioni.

L'equazione (β) dà:

$$F = mJ,$$

$$F_1 = m_1 J_1.$$

Da dove: $$\frac{F}{F_1} = \frac{mJ}{m_1 J_1}.$$

Quantità di moto.

Chiamasi quantità di moto *il prodotto della massa di un corpo per la sua velocità.*

Teorema.

Le forze sono proporzionali alle quantità di moto, quando il mobile parte dal riposo.

Abbiamo trovato qui sopra la relazione:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{mJ}{m_1 J_1}.$$

Moltiplichiamo il secondo membro dell'equazione per il fattore $\frac{t}{t}$, avremo:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{mJt}{m_1 J_1 t}.$$

Il mobile partendo dal riposo, Jt è la sua velocità alla fine del tempo t come pure $J_1 t$ è la velocità del secondo mobile alla fine dello stesso tempo; abbiamo dunque:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{mJt}{m_1 J_1 t} = \frac{mV}{m_1 V_1}.$$

Forze concorrenti.

Dicesi che due o più forze sono concorrenti *quando sono applicate ad uno stesso punto materiale ed hanno delle direzioni differenti.*

Chiamasi *resultante* di due o più forze *la forza unica che applicata allo stesso punto materiale nelle stesse circostanze, produce lo stesso effetto delle forze date, che chiamansi componenti.*

Quando si cerca la resultante di due o più forze si dice che si *compongono* queste forze.

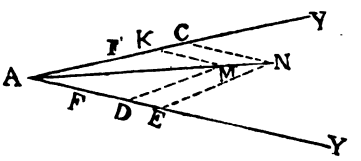
Parallelogrammo delle forze.

Teorema.

Quando due forze agiscono sopra uno stesso punto materiale, il moto che si produce nel loro piano è rettilineo, uniformemente

variato e diretto secondo la diagonale del parallelogrammo fatto sulle due forze. Questa diagonale rappresenta in grandezza ed in direzione la resultante delle due forze.

Sia un punto A sottomesso a due forze F, F' costanti in direzione ed in intensità. Sia AB la grandezza della forza F ed AC



quella della forza F'. Cerchiamo lo spazio percorso dal punto A sotto l'influenza delle forze F ed F'; ci appoggeremo perciò sul principio dell'indipendenza dell'effetto delle forze.

Prendiamo per assi coordinati le direzioni delle due forze F ed F'. Se la forza F agisse sola farebbe percorrere al punto A uno spazio

$$AD = x$$

e possiamo calcolare questo spazio per mezzo della formula:

$$s = s_0 + V_0 t + \frac{F}{2m} t^2,$$

m essendo la massa del punto A. Il punto parte dal riposo, dunque:

$$s_0 = 0, \; V_0 = 0.$$

Di più: $s = AD = x.$

Resta per ultimo:

(1) $$x = \frac{F}{2m} t^2.$$

Supponiamo ora che sia la forza F' che agisce sola sul punto A; essa farà percorrere a questo punto un certo spazio

$$AK = y$$

ed avremo:

(2) $$y = \frac{F'}{2m} t^2.$$

Eliminando t fra le equazioni (1) e (2) avremo l'equazione della traiettoria percorsa dal punto A sotto l'influenza delle forze F e F'. Per fare questa eliminazione dividiamo le equazioni (1) e (2) membro a membro,

$$\frac{y}{x} = \frac{F'}{F},$$

e facendo: $$\frac{F'}{F} = K.$$

otteniamo: $$\frac{y}{x} = K.$$

Da dove: $$y = Kx.$$

È l'equazione di una retta che passa dall'origine, cioè dal punto A. Dunque il punto A, sollecitato dalle forze F e F', percorre una linea retta.

Supponiamo ora che il punto A faccia parte di un sistema invariabile di paragone, animato della velocità V, che la forza F potrebbe imprimergli quando agisse sola. In questo caso, applicando il principio dell'effetto delle forze, se supponiamo che ad un momento dato il punto A sia sollecitato dalla forza F' sola, questo punto A prenderà relativamente al sistema di paragone esattamente lo stesso moto variato, come se il sistema di paragone non esistesse. Il moto relativo del punto A è dunque indipendente dal moto assoluto del sistema di paragone. In questo caso il punto A percorre lo spazio AK con un moto uniformemente variato, ed il mobile è in K alla fine del tempo t. Dunque la retta AK è il luogo delle differenti posizioni occupate successivamente dal punto A per tutto il tempo t. Supponiamo questa retta AK invariabilmente collegata col sistema invariabile di paragone. Alla fine del tempo t il punto A è venuto in D e la retta AK si è trasportata parallelamente a se stessa in KM, il punto K confondendosi in questo momento con il punto M, lo spazio percorso è AM. Ciò verifica il risultato precedentemente trovato, le coordinate del punto M essendo:

$$MD = AK = y$$

$$AD = x.$$

Il punto A trovasi sempre nel piano delle forze F ed F'. Infatti le parallele *MK* ed *MD* alle due forze *F* ed *F'* determinano un piano che è precisamente il piano delle due forze perchè le linee *AC* ed *AB* che rappresentano le due forze hanno almeno due punti comuni con le loro rispettive parallele; il piano delle parallele è dunque lo stesso di quello delle forze, e la linea *AM* avendo un punto sopra ogni parallela, è essa pure nel piano delle forze.

Per provare che il punto *A* si muove secondo la diagonale del parallelogrammo fatto sulle rette che rappresentano le forze, dal punto *C* estremità della forza *F'* conduciamo *CN* parallela alla direzione della forza *F*, e dal punto *B* estremità di questa forza *F* conduciamo *BN* parallela alla direzione della forza *F'*. Determineremo così un parallelogrammo *ABNC* chiamato *parallelogrammo delle forze*. Conduciamo la diagonale *AN* di questo parallelogrammo; questa diagonale si confonderà con *AM* che rappresenta la direzione dello spazio percorso dal punto *A* sotto la influenza dell'azione simultanea delle forze *F* e *F'*. Infatti, se x' ed y' sono le coordinate del punto *N*, abbiamo:

$$y' = NB = AC = F',$$

$$x' = AB = F.$$

E l'equazione della retta *AN* è:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{F'}{F} = K,$$

oppure: $$y' = Kx'.$$

Questa retta passa dall'origine, cioè dal punto *A*.

Dunque abbiamo due rette *AM, AN* situate nello stesso piano, passando ambedue dall'origine, e che hanno per equazioni:

$$y = Kx,$$
$$y' = Kx':$$

hanno cioè medesimo coefficiente angolare; dunque queste due rette coincidono.

Il moto resultante è uniformemente variato come quello prodotto dalle forze F e F'. Infatti nel triangolo *AMD* abbiamo:

$$\frac{AM}{sen\ MDA} = \frac{AD}{sen\ AMD},$$

ciò che dà:

$$AM = \frac{sen\ MDA}{sen\ AMD}\ AD.$$

Ma le direzioni delle forze essendo costanti, gli angoli *MDA*, *AMD* e per conseguenza i loro seni sono costanti, il loro rapporto è pure costante, e possiamo scrivere:

$$\frac{sen\ MDA}{sen\ AMD} = K_1.$$

Da dove: $AM = K_1 AD.$

AD è lo spazio che la forza *F* farebbe percorrere al punto *A* se agisse sola, ed abbiamo:

$$AD = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2.$$

perciò:

$$AM = K_1\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2.$$

$K_1\frac{1}{2}\frac{F}{m}$ è una costante e si può scrivere:

$$K_1\frac{1}{2}\frac{F}{m} = K_2.$$

Dunque: $AM = K_2 t^2.$

Lo spazio percorso è proporzionale al quadrato del tempo impiegato a percorrerlo, ciò è uno dei segni distintivi del moto uniformemente variato.

Chiamiamo *R* la resultante delle due forze *F* e *F'*; questa risultante è diretta secondo la diagonale *AN*. Supponiamo che alla

fine del tempo t il punto A sia venuto in M, avremo per lo spazio percorso:

$$AM = \frac{1}{2} \frac{R}{m} t^2.$$

Ma abbiamo già trovato:

$$AD = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2,$$

$$AK = \frac{1}{2} \frac{F'}{m} t^2.$$

Dunque: $AM : AD : AK :: R : F : F'$.

Consideriamo i triangoli *AMD* e *ANB*.

Abbiamo: $AM : AD : AK :: AN : AB : AC$.

Da queste proporzioni deduciamo:

$$R : F : F' :: AN : AB : AC.$$

Ma: $F = AB$,

$F' = AC$.

Dunque: $AN = R$.

Dunque *la resultante R è rappresentata in grandezza ed in direzione dalla diagonale del parallelogrammo fatto sulle due forze date.*

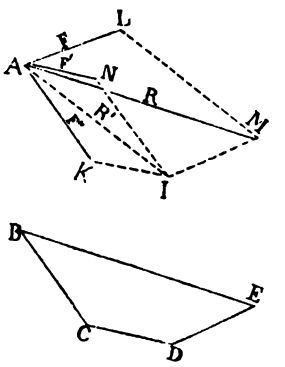
Osservando la figura, vediamo che si può ottenere in grandezza ed in direzione la resultante di due forze concorrenti, costruendo un triangolo che ha per lati una delle forze date, una retta condotta dall'estremità di questa forza, eguale e parallela all'altra forza, ed una retta che chiude l'angolo così formato.

Poligono delle forze.

Teorema.

La resultante di un numero qualunque di forze applicate ad uno stesso punto materiale è rappresentata in grandezza ed in direzione dalla retta che, partendo da questo punto, chiude il poligono i di cui lati sono formati da rette eguali, parallele e di medesimo senso delle rette che rappresentano le forze.

Siano tre forze F, F', F'' applicate al punto A. Supponiamo che questo punto A faccia parte di un sistema invariabile di paragone animato della stessa velocità che la forza F imprimerebbe al punto A se agisse sola. In virtù dell'indipendenza dell'azione delle forze dal moto anteriormente acquistato, il punto A, che è sottomesso solo alle forze F' e F'', prenderà relativamente al sistema



di paragone lo stesso moto relativo come se il moto assoluto non esistesse. Ma il moto prodotto dalle forze F', F'' quando agiscono sole è lo stesso di quello prodotto dalla loro resultante R', il moto del punto A è allora il resultato dell'azione delle forze F ed R', e come sappiamo trovare la resultante di due forze F ed R', così

$$R = AM,$$

rappresenterà la resultante delle tre forze date F, F', F''.

Se dal punto B conduciamo

$$BC = F'' \text{ e parallela ad } F'',$$
$$CD = F' \quad » \quad F',$$
$$DE = F \quad » \quad F,$$

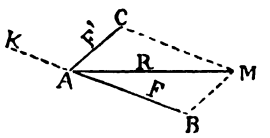
la linea BE, che chiude il poligono così costruito, sarà la resultante cercata.

Infatti componiamo le forze F' e F'', otterremo la resultante R'; componiamo le forze F ed R', avremo la resultante definitiva R. Componendo le tre forze F, F', F'' come abbiamo detto, abbiamo costruito un poligono $AKIM$; questo poligono è eguale al poligono $BCDE$, perchè BC è eguale e parallela ad F'', CD eguale e parallela ad F', DE eguale e parallela ad F. La retta BE è eguale e parallela ad AM perchè la figura $ABCDE$ può portarsi sulla figura $AKIM$, i punti B, C, D, E coincidono coi punti A, K, I, M, le rette BC, CD, DE prendono la direzione delle rette AK, KI, IM, e per conseguenza anche la retta BE coinciderà con la retta AM.

Se invece di tre si avesse a comporre un numero qualunque di forze concorrenti, si opererebbe come sopra.

Relazioni fra la resultante e le componenti.

Siano le due forze F, F', e sia R la loro resultante. Nel triangolo ABM abbiamo:



$$\overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BM}^2 \pm 2AB \times BM \cos ABM.$$

Ma il coseno dell'angolo ABM è il medesimo di quello dell'angolo CAK che è eguale al coseno del suo supplemento CAB.

$$\cos ABM = \cos CAK = \cos CAB.$$

CAB è l'angolo delle forze F e F', dunque

$$\cos CAB = \cos (F, F')$$

e la relazione sopra scritta diventa:

$$(1) \qquad R^2 = F^2 + F'^2 \pm 2FF' \cos (F, F')$$

Nel triangolo ABM abbiamo pure la relazione trigonometrica seguente:

$$\frac{AM}{sen\ ABM} = \frac{AB}{sen\ AMB} = \frac{BM}{sen\ BAM}.$$

Oppure:

$$(2) \qquad \frac{R}{sen\ (F,F')} = \frac{F}{sen\ (R,F')} = \frac{F'}{sen\ (R,F)}.$$

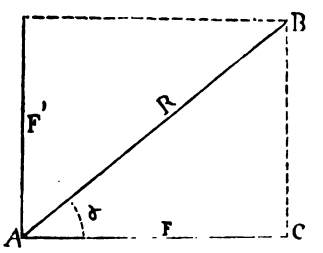
Se $$F = F',$$

il parallelogrammo delle forze diventa un rombo ed abbiamo per la formula (1).

$$R^2 = 2F^2 \pm 2F^2\ cos\ (F,F'),$$

$$R^2 = 2F^2(1 \pm cos\ (F,F')).$$

Se le due forze sono ad angolo retto, chiamando α l'angolo della resultante R con la forza F, abbiamo:



$$\frac{BC}{AB} = sen\alpha,$$

$$BC = AB\ sen\alpha,$$

ossia: $$F' = R\ sen\alpha.$$

Abbiamo pure:

$$\frac{AC}{AB} = cos\alpha,$$

$$AC = AB\ cos\alpha$$

ossia: $$F = R\ cos\alpha.$$

Ed infine:

$$R^2 = F^2 + F'^2.$$

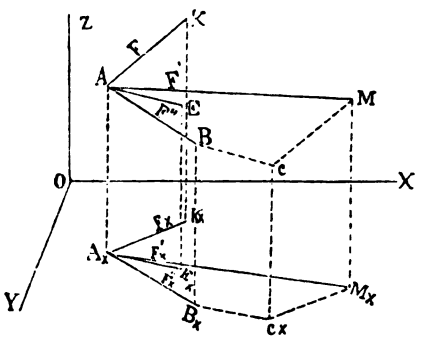
Dunque fra le quantità F, F', R, α abbiamo tre relazioni e possiamo determinare una qualunque di queste quantità conoscendo le altre.

Proiezioni delle forze sopra un piano fisso.

Teorema.

La proiezione della resultante è eguale alla resultante delle proiezioni delle componenti.

Siano nello spazio tre forze concorrenti F, F', F''. Proiettiamo queste forze sopra un piano XOY parallelamente all'asse OZ, e siano $F_x, F'_x F''_x$ queste proiezioni. Facciamo nello spazio il poligono $ABCM$ delle forze, poligono che ci dà la resultante R, nel piano YOX facciamo il poligono $A_x B_x C_x M_x$ delle proiezioni di dette forze, po-



ligono che ci dà la resultante R_x. Il poligono $A_x B_x C_x M_x$ è la proiezione nel piano YOX del poligono $ABCM$, perchè per costruzione $A_x B_x$ è la proiezione di AB, $A_x E_x$ è la proiezione di AE, $B_x C_x$ è la proiezione di BC poichè le due linee dello spazio AE, BC sono eguali e parallele e le loro proiezioni devono essere pure eguali e parallele. Si dimostrerebbe con un ragionamento analogo che $C_x M_x$ è la proiezione di CM. La linea $A_x M_x$ è la proiezione della linea AM, perchè i punti M_x ed A_x sono le proiezioni dei punti A ed M. Dun-

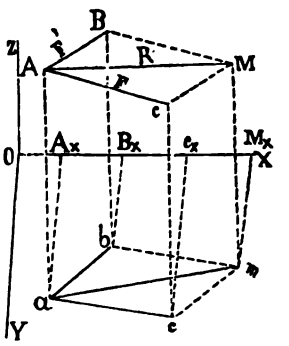
que la retta $A_x M_x$ che è la resultante delle proiezioni delle forze, è la proiezione della linea AM, che è la resultante delle forze nello spazio.

Proiezioni delle forze sopra un asse fisso.

Teorema.

La proiezione della resultante sopra un asse qualunque è eguale alla somma delle proiezioni delle componenti sopra questo asse.

Siano due forze F, F', la cui resultante è R. Facciamo passare da ognuna di queste tre forze rappresentate dalle rette AB, AC, AM



un piano parallelo al piano YOZ, le proietteremo così sull'asse OX. Abbiamo sulla figura:

$$A_x B_x = \text{proiezione di } F' \text{ sopra } OX = F'_x,$$
$$A_x C_x = \quad » \quad F \quad » \quad = F_x,$$
$$A_x M_x = \quad » \quad R \quad » \quad = R_x$$

Considerando la linea $A_x M_x$, abbiamo:

$$A_x M_x = A_x B_x + B_x M_x.$$

Ma $B_x M_x$ è la proiezione di BM sopra OX nel piano YOX, $A_x C_x$ è la proiezione di AC sopra OX in questo stesso piano, di più dobbiamo avere:

$$B_x M_x = A_x C_x$$

perchè le linee ac e bm sono eguali e parallele; per conseguenza

$$A_x M_x = A_x B_x + B_x M_x = A_x B_x + A_x C_x$$

oppure,

$$R_x = F_x + F'_x.$$

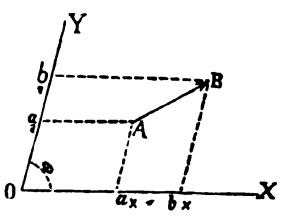
Il teorema essendo vero qualunque sia l'asse sul quale si proiettano le forze, si ha:

$$R_y = F_y + F'_y,$$
$$R_z = F_z + F'_z.$$

Conoscendo le tre proiezioni R_x, R_y, R_z della resultante R di due o più forze, questa resultante R è determinata perchè è la diagonale di un parallelepipedo le di cui tre dimensioni sono precisamente le tre componenti R_x, R_y, R_z.

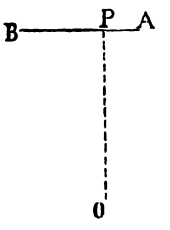
Teoria dei momenti per le forze concorrenti.
Momenti intorno ad un punto.

Sia una forza AB situata in un piano YOX. Potremo determinare la retta AB per mezzo delle sue due proiezioni $a_x b_x$, $a_y b_y$ sopra due assi OY, OX qualunque.



Questa determinazione grafica sufficiente per una retta, non lo è per una forza perchè non si sa in qual senso essa agisca; per determinare questo senso, s'introduce nei calcoli la distanza della retta ad un punto fisso del piano e si indica con dei segni il senso secondo il quale avrebbe luogo la rotazione se la retta fissa formasse con quella che misura la sua distanza al punto fisso un sistema mobile intorno a questo punto. Daremo il segno + quando il movimento si effettua da sinistra a destra ed il segno — nel caso contrario.

Ciò posto, se AB rappresenta la forza F, O un punto fisso del piano e f la distanza OP dal punto fisso alla forza: chiamasi *mo-*



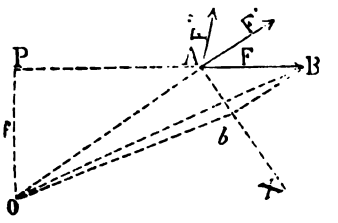
mento della forza F relativamente al punto O il prodotto Ff e s'indica algebricamente scrivendo:

$$\mathcal{M}_{oF} = Ff.$$

Teorema di Varignon.

Se più forze situate nello stesso piano sono applicate ad uno stesso punto A, il momento della resultante è uguale alla somma dei momenti delle componenti.

Siano più forze F, F', F'' applicate al punto A e sia un punto O



situato nel loro piano intorno al quale si devono prendere i momenti. Il momento della forza F è:

$$\mathcal{M}_{oF} = AB \times OP = Ff.$$

Conduciamo OA e nel piano delle forze, AX perpendicolare a OA, conduciamo pure Bb perpendicolare sopra AX. In questo caso Ab è la proiezione ortogonale di AB,

$$Ab = F_x.$$

Conduciamo le rette OB, Ob, avremo così due triangoli AOB, AOb che hanno medesima superficie perchè hanno base comune AO e i vertici B, b sopra una medesima parallela ad AO, AO e Bb essendo perpendicolari ambedue ad AX: si può dunque scrivere

$$sup.\ AOB = sup.\ AOb.$$

Ma: $$sup.\ AOB = AB \times \frac{1}{2}\ OP.$$

$$sup.\ AOb = Ab \times \frac{1}{2}\ OA,$$

ne risulta: $$AB \times \frac{1}{2}\ OP = Ab \times \frac{1}{2}\ OA,$$

$$AB \times OP = Ab \times OA.$$

Ma $$AB = F,\ OP = f,\ Ab = F_x.$$

Dunque:

$$Ff = F_x \times OA.$$

Operando per le forze F' e F'' come abbiamo operato per la forza F, avremo:

$$F'f' = F'_x \times OA,$$
$$F''f'' = F''_x \times OA.$$

Addizionando queste tre eguaglianze, si ottiene:

$$\Sigma Ff = \Sigma F_x \times OA.$$

Ma la proiezione della resultante sopra un asse qualunque è eguale alla somma delle proiezioni delle componenti sopra quest'asse,

$$\Sigma F_x = R_x$$

e per conseguenza:

$$\Sigma Ff = R_x \times OA.$$

Se avessimo fatto per la forza R la stessa costruzione che abbiamo fatto per la forza F, avremmo trovato:

$$\mathcal{M}_o R = Rr = R_x \times OA.$$

Dunque:

$$\Sigma Ff = R_x \times OA = Rr.$$

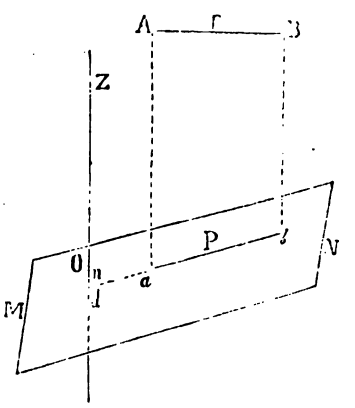
Ed infine:

$$\Sigma \mathcal{M}_o F = \mathcal{M}_o R.$$

Momenti intorno ad un asse.

Chiamasi *momento d'una forza intorno ad un asse, il momento della proiezione di questa forza sopra un piano perpendicolare all'asse, preso intorno al punto dove l'asse incontra il piano.*

Sia un asse *OZ*, una forza *AB* nello spazio. Conduciamo un piano *MN* perpendicolare all'asse *OZ* e che incontri quest'asse nel punto *O*.



Proiettiamo la forza *F* nel piano *MN* per mezzo delle proiettanti *Aa, Bb* parallele all'asse *OZ* ed avremo così la proiezione di *AB;*

$$ab = P = \text{proiezione di } F.$$

Conduciamo *Od* perpendicolare sopra *ab*, chiamiamo *p* questa distanza *Od*. Il momento della forza *F* preso intorno all'asse *OZ* è per definizione:

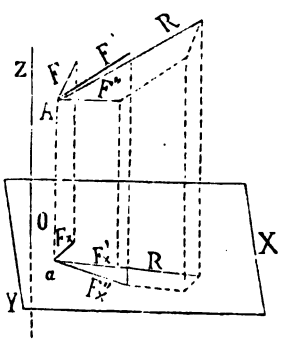
$$\mathcal{M}_z F = ab \times Od = Pp.$$

In generale la forza F differisce dalla sua proiezione P. Queste forze sono eguali quando sono in piani paralleli.

Teorema di Varignon.

Il momento della resultante di un certo numero di forze concorrenti, preso intorno ad un asse qualunque, è eguale alla somma dei momenti delle forze componenti.

Siano nello spazio le forze F, F', F'' e l'asse Z. Sia R la resultante delle forze date. Conduciamo il piano XY perpendicolare al-



l'asse Z; esso incontra quest'asse nel punto O. Proiettiamo sopra questo piano le forze F, F', F'' e come la proiezione della resultante è eguale alla somma delle proiezioni delle componenti, abbiamo:

$$R_x = \Sigma F_x.$$

Ma se nel piano XY prendiamo i momenti delle differenti forze intorno al punto O abbiamo in virtù del teorema precedente:

$$\mathcal{M}_o\, R_x = \Sigma\, \mathcal{M}_o\, F_x$$

per definizione:

$$\mathcal{M}_o\, R_x = \mathcal{M}_z\, R,$$

$$\mathcal{M}_o\, F_x = \mathcal{M}_z\, F.$$

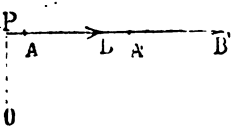
Dunque:

$$\mathcal{M}_z\, R = \Sigma\, \mathcal{M}_z\, F.$$

Corollari.

Il momento di una forza non cambia se si cambia il suo punto d'applicazione purchè non si cambi nè la sua direzione, nè la sua intensità.

Sia AB una forza qualunque, il momento di questa forza preso intorno al punto O è $AB \times OP$. Trasportando la forza in $A'B'$ seguendo



la stessa direzione, il suo momento è $A'B' \times OP$; ma come la forza è sempre d'eguale intensità,

$$AB = A'B'$$
$$AB \times OP = A'B' \times OP.$$

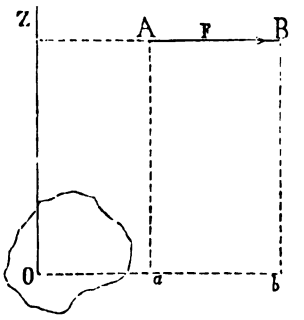
Quando la forza incontra il punto intorno al quale si prende il suo momento, questo momento è nullo poichè sappiamo che:

$$\mathcal{M}_o F = Ff$$

e se

$$f = o$$
$$\mathcal{M}_o F = 0.$$

Il momento di una forza preso intorno ad un asse è eguale a zero quando la forza incontra l'asse.



Sia la forza AB o F che prolungata incontra l'asse in un punto C. Proiettiamo il punto B in b sopra il piano perpendicolare all'asse Z

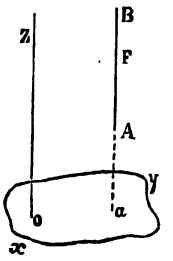
e congiungiamo i punti O e b. Il punto O essendo la proiezione del punto C dove AB incontra l'asse Z, la retta Ob sarà la proiezione di BC e la retta AB che fa parte di BC si proietterà in ab che fa parte di Ob; in tal caso questa proiezione p incontra l'asse Z in O, perciò:

$$\mathcal{M}_o\,(ab) = \mathcal{M}_o\,p.$$

Ma $$\mathcal{M}_o\,p = \mathcal{M}_z F.$$

Dunque: $$\mathcal{M}_z F = 0.$$

Il momento di una forza presa intorno ad un asse è eguale a zero quando quest'asse è parallelo alla direzione della forza.



Supponiamo una forza F rappresentata da una retta AB parallela all'asse Z. La proiezione della forza sul piano xy è un punto ed il momento di un punto intorno ad un punto non esiste e perciò il momento preso intorno all'asse è eguale a zero.

Capitolo II.

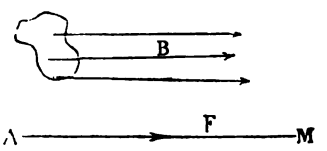
Moto di un punto materiale libero.

Moto rettilineo.

Teorema.

Se un punto materiale avente una velocità qualunque V è sollecitato da una forza unica e costante F diretta nello stesso senso della velocità iniziale, il moto è rettilineo, uniformemente variato e l'accelerazione è indipendente dalla velocità V e dalla forza F.

Sia un punto A sollecitato solo dalla forza F, supponiamo che questa forza F agisca nel senso della velocità V. Sia un sistema di punti B aventi tutti la velocità iniziale V del punto A nel momento in cui la forza F comincia ad agire su questo punto. Il sistema B



conservando indefinitamente la velocità V, in un tempo piccolissimo ma apprezzabile Δt, la forza F che agisce sul punto A fa percorrere a questo punto un piccolo spazio nel senso della velocità e ne risulta per A una velocità ΔV tale che:

$$\Delta V = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ma il punto A ha già una velocità iniziale V e di più in virtù del terzo principio la forza F agisce indipendentemente dal moto

anteriormente acquistato. Dunque relativamente al sistema di paragone B, la velocità del punto A alla fine del tempo Δt è ΔV, ma questo punto è in realtà animato d'una velocità V_1 tale che:

$$(1) \qquad V_1 = V + \Delta V.$$

Sia un secondo intervallo di tempo Δt di medesima lunghezza del precedente, la velocità V_2 alla fine di questo secondo intervallo è

$$(2) \qquad V_2 = V_1 + \Delta V = V + 2\,\Delta V.$$

Poi per il terzo, per il quarto, per l'm^{esimo} intervallo si ha:

$$(3) \qquad V_3 = V + 3\,\Delta V$$

$$(4) \qquad V_4 = V + 4\,\Delta V$$

. . . . . .

$$(m) \qquad V_m = V + m\,\Delta V$$

Tutte queste eguaglianze provano che la velocità è proporzionale al tempo; il moto prodotto è dunque uniformente variato.

L'accrescimento di velocità ΔV *è di medesimo senso della forza* F. Infatti, il moto prodotto da una forza si effettua nel senso di questa forza, lo spazio percorso Δs è di medesimo senso della forza F, e poichè

$$\Delta V = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

ΔV ha sempre il medesimo segno di Δs. L'accelerazione che è data dal rapporto $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ ha lo stesso segno di ΔV e perciò lo stesso della forza F.

Dunque l'accelerazione è di medesimo senso della forza F e completamente indipendente dalla velocità iniziale V.

Reciprocamente: *Se il moto di un mobile è uniformemente variato e rettilineo, questo moto è prodotto da una forza unica e costante in direzione ed in intensità.*

Se vi è moto, il mobile è sottomesso all'azione di una forza almeno. Una sola forza agisce, perchè se fossero diverse che agissero in sensi diversi, la velocità varierebbe ed il moto non sarebbe più nè rettilineo nè uniformemente variato, ciò che è contrario all'ipotesi.

Se la forza F non agisce nello stesso senso della velocità V, in virtù del terzo principio il mobile prende un'altra direzione ed il moto è allora parabolico.

Una forza F essendo conosciuta, come pure la massa m del punto materiale sul quale essa agisce, possiamo determinare la natura del moto e le sue variazioni se la forza F è variabile, conoscendo però le variazioni di questa forza.

Abbiamo infatti la relazione:

$$F = mJ. \qquad (1)$$

Se il mobile percorre nel tempo t uno spazio x, e se V è la sua velocità alla fine di questo tempo t, abbiamo:

$$V = \frac{dx}{dt}$$

e

$$J = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Sostituendo a J il suo valore nell'equazione (1), veniamo ad avere:

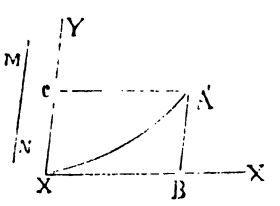
$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Questa è l'equazione differenziale del moto del punto. Integrando, avremo l'equazione finita del moto.

Moto curvilineo d'un punto materiale.

Teorema.

Allorquando un punto materiale avente una certa velocità iniziale è sollecitato da una forza costante la cui direzione fa un angolo con la direzione della velocità iniziale, il moto prodotto a quest'istante è un moto parabolico.



Supponiamo che il corpo si muova primitivamente secondo una retta AX e supponiamo che al punto considerato A il mobile abbia

una velocità iniziale V_0 diretta secondo AX. Sia $AB = x$ lo spazio che questo corpo percorre con un moto uniforme sulla retta AX, avremo:

$$AB = x = V_0 t.$$

Supponiamo che nel punto A il mobile sia sottomesso ad una forza R costante in grandezza ed in direzione, e supponiamo che questa direzione sia parallela a MN. Prendiamo per assi coordinati la linea AX che rappresenta la direzione della velocità iniziale V_0 e una parallela AY ad MN.

Se il punto A si muovesse sotto la sola influenza della velocità iniziale V_0, nel tempo t percorrerebbe lo spazio AB ed avremmo:

$$(1) \qquad AB = x = V_0 t.$$

Se questo punto A fosse sottomesso alla sola azione della forza R, nello stesso tempo t percorrerebbe lo spazio $AC = y$, ed avremmo, m essendo la massa del mobile

$$(2) \qquad AC = y = \frac{1}{2} \frac{R}{m} t^2.$$

Eliminando t fra le equazioni (1) e (2), otterremo l'equazione della traiettoria percorsa dal punto A quand'è sottomesso simultaneamente all'azione della forza R e della velocità iniziale Vo. L'equazione (1) dà:

$$t = \frac{x}{V_0}.$$

Da dove:

$$t^2 = \frac{x^2}{V_0^2}.$$

Portando il valore di t^2 nell'equazione (2),

$$y = \frac{1}{2} \frac{R}{m} \frac{x^2}{V_0^2}.$$

Ossia:

$$y = \frac{R}{2mV_0^2} x^2,$$

equazione di una parabola che si può costruire facilmente. La curva è tangente in un punto qualunque alla direzione della velocità in questo punto perchè se il tempo t fosse piccolissimo e eguale

a Δt, lo spazio che percorrerebbe il punto A sotto l'influenza della sola velocità iniziale sarebbe:

$$\Delta X = V_0 \Delta t,$$

e lo spazio che questo stesso punto percorrerebbe sotto l'influenza della forza R sarebbe:

$$\Delta y = \frac{1}{2} \frac{R}{m} \Delta t^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{R}{2m V_0} \Delta t.$$

Il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ rappresenta la secante AA' supponendo che il punto A' sia vicinissimo al punto A. Questi due punti tendendo sempre ad avvicinarsi, al limite abbiamo, Δt tendendo verso zero,

$$lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = V.$$

Dunque:

$$V = \frac{R}{2m V_0} \times 0 = 0.$$

Ciò significa che la secante AA' della curva si è confusa con l'asse AX; ma il limite delle posizioni di questa secante AA' non è altro che la tangente nel punto A, dunque la secante si confonde in questo punto con la direzione della velocità iniziale V_0 ed è tangente alla curva. Questo ragionamento può applicarsi ad un punto qualunque della traiettoria AA' e sarà vero per tutti i suoi punti.

Se gli assi coordinati invece di obliqui fossero stati rettangolari e diretti l'uno secondo la velocità iniziale V_0, l'altro secondo una perpendicolare alla direzione di questa velocità, il ragionamento poteva semplificarsi.

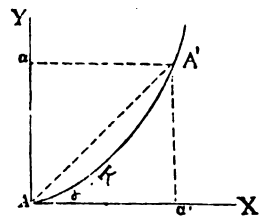
Sia infatti AKA' la parabola percorsa dal punto A e supponiamo il punto A' infinitamente vicino al punto A. Siano dy e dx le coordinate del punto A', avremo, lo spazio percorso essendo ds,

$$ds = AA', \; dy = A'a', \; dx = Aa'.$$

Nel triangolo rettangolo $AA'a'$ abbiamo:

$$dx = ds \cos\alpha,$$

ps rappresentando la secante AA' invece dell'arco di curva AKA', la differenza fra queste due linee essendo un infinitamente piccolo



di second'ordine e che può essere perciò trascurato. Mentre il punto A' si avvicina al punto A, l'angolo α diventa sempre più piccolo ed al limite per

$$\alpha = 0, \cos\alpha = 1$$

perciò: $$dx = ds.$$

In questo caso la lunghezza della proiezione dx è:

$$dx = ds = V_0 dt.$$

Da dove: $$\frac{ds}{dt} = V_0.$$

Ciò prova che la velocità V_0 si esercita precisamente secondo la tangente alla curva nel punto A, poichè a questo momento

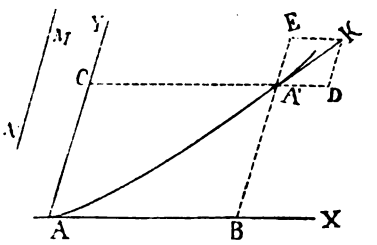
$$\alpha = 0.$$

Il ragionamento fatto per il punto A può applicarsi evidentemente ad un punto qualunque della curva.

La direzione della velocità in un punto qualunque della curva essendo conosciuta, cerchiamo la sua grandezza.

Sull'asse AX abbiamo per un punto qualunque:

$$x = V_0 t.$$



Ciò vuol dire che la proiezione del punto A sopra l'asse AX ha un moto uniforme, la cui velocità è V_0 perchè V essendo questa velocità, abbiamo:

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{d(V_0 t)}{dt} = V_0.$$

Si ottiene lo stesso resultato differenziando l'equazione

$$x = V_0 t.$$

Infatti: $$dx = d(V_0 t) = V_0 dt.$$

Da dove: $$\frac{dx}{dt} = V_0.$$

Esaminando il moto del punto A sull'asse AY, lo spazio percorso è:

$$y = \frac{1}{2} \frac{R}{m} t^2,$$

V essendo la sua velocità, abbiamo:

$$V = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(\frac{R}{2m} t^2\right)}{dt} = \frac{R}{m} t.$$

Riassumendo ed indicando con V_x e V_y le velocità delle proiezioni del moto sopra gli assi AX e AY, abbiamo:

$$V_x = V_0,\ V_y = \frac{R}{m}\, t.$$

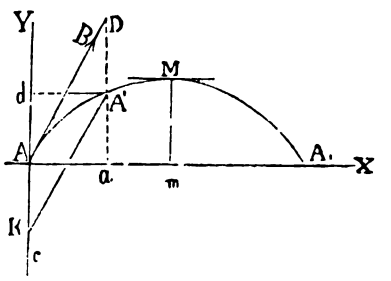
Queste due velocità essendo conosciute troveremo la velocità in un punto qualunque della curva AA' componendole secondo le regole indicate in Cinematica.

Supponiamo per esempio che alla fine del tempo t qualunque il punto A sia venuto in A' e che si voglia la velocità in questo punto A'. Condurremo $A'D$ parallela a AX e eguale a V_x, poi $A'E$ parallela a AY e eguale a V_y; costruiremo sulle rette $A'D$, $A'E$ un parallelogrammo $A'DKE$ e la diagonale $A'K$ rappresenterà in direzione ed in intensità la velocità V' del mobile.

Come verificazione, la retta $A'K$ dev'essere tangente alla curva AA' nel punto A'.

Moto di un proiettile lanciato nel vuoto.

Supponiamo che il punto A sia lanciato con una certa velocità iniziale V_0 rappresentata in intensità ed in direzione dalla retta AB. Supponiamo il corpo sottomesso alla sola azione della gravità e pren-



diamo per assi coordinati AY parallelo alla direzione della gravità e AX perpendicolare a questa direzione. L'origine A corrisponde al momento in cui comincia il moto.

Abbiamo dunque un punto A che si muove sotto l'influenza della velocità iniziale V_0 e di una forza costante (la gravità) la

cui intensità possiamo rappresentare con una lunghezza AC. La traiettoria descritta dal punto A è una parabola di cui possiamo facilmente trovare l'equazione.

Prima di tutto osserviamo che per trovare un punto A' della curva bisogna prendere sul prolungamento di AB,

$$AD = V_0 t$$

e sul prolungamento di AY

$$AK = \frac{1}{2} g t^2;$$

dal punto K condurre una parallela ad AB fino al punto d'incontro A' di questa parallela con la verticale abbassata dal punto D: il punto A' è un punto della parabola.

Se il punto A percorre nello spazio la curva AA', lo spazio percorso dalla proiezione di detto punto A sull'asse AX è, V_x essendo la velocità del moto sopra quest'asse,

$$x = Aa = V_x t.$$

Ma V_x è la proiezione della velocità iniziale V_0 ed α essendo l'angolo che fa la direzione di questa velocità con l'asse AX, abbiamo:

$$V_x = V_0 \cos\alpha.$$

Dunque: (1) $$x = V_0 t \cos\alpha.$$

Lo spazio percorso sull'asse AY dalla proiezione del punto A sopra quest'asse è:

$$y = Da - DA'.$$

Ma $$Da = DA \cos ADa;$$

per costruzione

$$A'D = AK.$$

Dunque:

$$y = Da - DA' = AD \cos ADa - AK.$$

Ora $\cos ADa = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$;

sulla figura abbiamo

$$AD = V_0 t,$$

$$AK = \frac{1}{2} g t^2.$$

Dunque:

$$(2) \qquad y = V_0 t \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Eliminando t fra le equazioni (1) e (2), avremo l'equazione della parabola descritta dal punto A.

L'equazione (1) dà:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\alpha},$$

sostituendo nell'equazione (2) t al suo valore, abbiamo:

$$y = V_0 \frac{x}{V_0 \cos\alpha} \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha}$$

oppure, $$(3) \qquad y = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\alpha}$$

Sia M il punto più alto al quale s'innalza il punto A nel suo moto. Quando il mobile arriva in questo punto la parabola passa da un punto massimo; dobbiamo avere perciò:

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Differenziando l'equazione (3) viene:

$$dy = dx \operatorname{tang}\alpha - g \frac{x dx}{V_0^2 \cos^2\alpha},$$

per conseguenza

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha - g \frac{x}{V_0^2 \cos^2\alpha} = 0.$$

Da dove:

$$V_0^2 \cos^2\alpha \ tang\alpha - gx = 0,$$

$$gx = V_0^2 \cos^2\alpha \ tang\alpha,$$

$$x = \frac{V_0^2 \ sen\alpha \ cos\alpha}{g}.$$

Abbiamo così il valore dell'ascissa Am che corrisponde all'ordinata massima Mm. Introducendo questo valore d'x nell'equazione (3)

$$y = \frac{V_0^2 \ sen\alpha \ cos\alpha}{g} \ tang\alpha - \frac{1}{2} g \frac{V_0^4 \ sen^2\alpha \ cos^2\alpha \ \frac{1}{g^2}}{V_0^2 \ cos^2\alpha}$$

oppure,
$$y = \frac{V_0^2 \ sen\alpha \ cos\alpha}{g} \cdot \frac{sen\alpha}{cos\alpha} - \frac{1}{2} g \ V_0^4 \ sen^2\alpha \frac{1}{g^2},$$

$$y = \frac{V_0^2 \ sen^2\alpha}{g} - \frac{1}{2} \frac{V_0^2 \ sen^2\alpha}{g},$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 \ sen^2\alpha}{g}.$$

Abbiamo così l'altezza massima alla quale può giungere un corpo lanciato nel vuoto con una velocità iniziale V_0 e sotto un angolo α.

Chiamasi *ampiezza del getto* la distanza AA_1 compresa fra i due punti ove la parabola incontra l'asse AX. Si ottengono i punti A e A_1 facendo $y = o$ nell'equazione della curva che diventa allora:

$$x \ tang\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_0^4 \cos^2\alpha} = 0,$$

oppure,
$$x \left(tang\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x}{V_0^2 \cos^2\alpha} \right) = 0.$$

Da dove:
$$x = 0,$$

e
$$tang\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x}{V_0^2 \cos^2\alpha} = 0,$$

$$2V_0^2 \ sen\alpha \ cos\alpha = gx,$$

$$x = \frac{2V_0^2 \ sen\alpha \ cos\alpha}{g}.$$

L'ampiezza del getto è il doppio dell'ascissa del punto massimo della curva ed il quadruplo dell'altezza alla quale arriva il mobile. Ciò mostra che la curva è simetrica relativamente alla verticale *Mm*.

Per sapere qual è l'angolo α che corrisponde alla più grande ampiezza di getto per una data velocità iniziale V_0 osserviamo nell'equazione precedente

$$x = \frac{2 V_0^2 \, sen\alpha \, cos\alpha}{g}$$

che x varia con α. Cerchiamo dunque il valore massimo di x facendo variare α.

In trigonometria abbiamo:

$$2 \, sen\alpha \, cos\alpha = sen \, 2\alpha$$

e perciò:

$$AA_1 = x = \frac{V_0^2 \, sen \, 2\alpha}{g}.$$

Il valore di x sarà massimo quando quello di α sarà pure massimo. Il più gran valore che possa prendere $sen 2\alpha$ corrisponde a

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^0$$

perchè allora $sen \, 2\alpha = 1.$

Ma se $2\alpha = 90^0,$

$$\alpha = \frac{90}{2} = 45^0.$$

Dunque l'ampiezza massima del getto si otterrà quando si lancia il mobile sotto un angolo di 45°.

Il valore di quest'ampiezza massima è data dall'equazione.

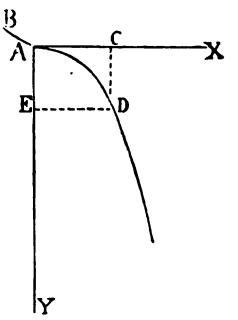
$$x = \frac{V_0^2 \, sen \, 2\alpha}{g};$$

facendo $\alpha = \frac{\pi}{4},$

$$x = \frac{V_0^2 \, sen \frac{\pi}{2}}{g}$$

Possiamo appoggiarci su quello che precede per determinare indirettamente la velocità con la quale un liquido esce da un vaso da un *orificio praticato in lastra sottile* e sotto una pressione conosciuta.

Supponiamo che il liquido segua la direzione BA in modo che la tangente CA alla curva nel punto A sia orizzontale. In questo punto A il liquido cade secondo una parabola AM; basterà conoscerne un punto per poter determinare la velocità iniziale V_0 nel



punto A. Prendiamo per asse delle x la tangente alla curva in A che è la direzione della velocità iniziale V_0, per asse delle y la verticale che passa dal punto A. Per un punto qualunque D della curva abbiamo:

$$AC = x,$$

$$AE = y.$$

Ma sappiamo che

$$x = V_0 t$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2.$$

Eliminando t fra queste due equazioni:

$$y = \frac{1}{2} \frac{g}{V^2_0} x^2,$$

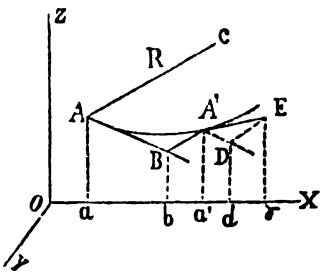
$$2 V^2_0 y = g x^2.$$

Da dove: $$V^2_0 = \frac{g}{2} \frac{x^2}{y} = \frac{1}{2} g \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AE}}$$

Proiezione del moto d'un corpo sopra un asse.

Teorema.

Se un punto materiale A si muove nello spazio, animato da una velocità iniziale V_0 e da una forza R costante o variabile, la sua proiezione sopra un asse qualunque si muove come un



corpo di stessa massa m, con una velocità eguale alla proiezione della velocità e sollecitato da una forza eguale alla proiezione della forza che sollecita il punto A nello spazio.

Siano tre assi qualunque *OX*, *OY*, *OZ* e proiettiamo sopra *OX* la traiettoria *AA'* parallelamente ad un piano direttore determinato dalle rette *OY*, *OZ*. Costruiamo la linea spezzata *ABA'*, in modo che si abbia:

$$AB = V_0 t,$$

$$BA' = \frac{1}{2}\frac{R}{m} t^2.$$

Di più facciamo in modo che *AB* sia diretta secondo la velocità iniziale V_0 e *BA* parallela alla direzione *AC* della forza *R*.

Se proiettiamo la linea spezzata *ABA'* sopra *OX* come la traiettoria *AA'* e nello stesso modo, avremo

$$aa' = ab + ba'.$$

Ma *aa'* è precisamente lo spazio percorso nel tempo *t* dalla

proiezione del punto A sull'asse OX, spazio che rappresenteremo con la lettera x.

La proiezione ab di AB è $V_{0x}t$, V_{0x} essendo la proiezione della velocità iniziale V_0 e ba' proiezione di BA' ha per valore $\frac{1}{2}\frac{R_x}{m}t^2$ la forza sola cambiando. Dunque lo spazio percorso dalla proiezione del punto A sull'asse OX è

$$x = V_{0x}t + \frac{1}{2}\frac{R_x}{m}t^2.$$

Teorema.

L'accelerazione $\frac{R_x}{m}$ *della proiezione del moto di un punto sopra un asse OX è quella che imprimerebbe ad un punto di stessa massa una forza* R_x *che agisse secondo OX e eguale alla proiezione della forza che agisce nello spazio.*

Infatti dall'equazione precedente:

$$x = V_{0x}t + \frac{1}{2}\frac{R_x}{m}t^2$$

si deduce differenziando:

$$dx = V_{0x}dt + \frac{R_x}{m}t\,dt.$$

$$\frac{dx}{dt} = V_{0x} + \frac{R_x}{m}t$$

e prendendo la derivata

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{R_x}{m}$$

che è precisamente l'accelerazione cercata. Da quest'ultima equazione si deduce:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = R_x$$

e supponendo che R sia la resultante di più forze F e operando sopra gli assi OY e OZ come abbiamo operato sull'asse OX avremo:

$$R_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma F_x,$$

$$R_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma F_y,$$

$$R_z = m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma F_z.$$

Queste tre equazioni chiamansi *le equazioni differenziali del moto di un punto materiale.* Integrando queste equazioni e deducendo i valori di x, y, z in funzione di t, il moto del mobile è determinato.

L'integrazione di queste tre equazioni differenziali introdurrà sei costanti arbitrarie; si determinano queste costanti secondo le condizioni iniziali del moto.

Se il moto del punto materiale si effettua sopra un piano, le equazioni differenziali si riducono a due e dovremo allora determinare solo quattro costanti arbitrarie.

Supponiamo che dopo aver proiettato il moto del punto materiale A si voglia la proiezione della velocità nel punto A': conduciamo nello spazio $A'D$ parallela alla direzione della velocità iniziale V_0 ed eguale a questa velocità.

$$A'D = V_0.$$

DE eguale a $\frac{R}{m}t$ e parallela alla direzione della forza R;

$$DE = \frac{R}{m}t.$$

Così la velocità V' nel punto A' è determinata in grandezza ed in direzione; abbiamo:

$$A'E = V'.$$

Proiettiamo la linea spezzata $A'DE$ sull'asse OX;

$$a'e = a'd + de.$$

Chiamando V'_x la proiezione della velocità V' sull'asse OX abbiamo:

$$d'd = \text{proiezione di } A'D = V_{ox}.$$

$$de = \text{proiezione di } DE = \frac{R_x}{m} t.$$

Dunque: $$V'_x = V_{ox} + \frac{R_x}{m} t$$

Quest'equazione si può scrivere:

$$V'_x - V_{ox} = \frac{R_x}{m} t.$$

La differenza $V'_x - V_{ox}$ rappresenta l'accrescimento di velocità quando il mobile va dal punto A al punto A', dV_{ox} essendo quest'accrescimento, abbiamo:

$$dV_{ox} = V'_x - V_{0x} = \frac{R_x}{m} dt.$$

Da dove: $$\frac{dV_{ox}}{dt} = \frac{R_x}{m},$$

abbiamo così l'accelerazione sull'asse OX.

Quantità di moto.

Chiamasi quantità di moto il prodotto della massa m d'un corpo per la sua velocità V.

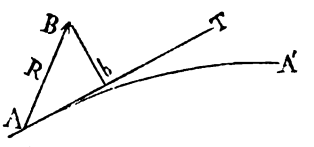
Impulsione d'una forza.

Chiamasi *impulsione d'una forza il prodotto di questa forza presa con il suo segno per il tempo in cui agisce. L'impulsione elementare è il prodotto Fdt e l'impulsione totale l'integrale dell'impulsione elementare,* $\int_0^t Fdt$.

Teorema.

La variazione della quantità di moto fra due istanti considerati è eguale all'impulsione totale della forza nello stesso tempo.

Supponiamo che un punto materiale percorra la curva AA' sotto l'influenza di forze F che hanno per resultante R.



Nell'istante considerato, il punto materiale essendo in A, conduciamo AT tangente alla curva in A. Sia V la velocità nel punto A: questo punto percorrendo la curva AA', quando percorre uno spazio infinitamente piccolo ds, possiamo supporre che l'elemento di curva ds si confonde con la sua tangente AT ed allora proiettando la forza R sopra AT abbiamo:

$$R = Ab \cos bAB = Ab \cos (R, ds).$$

In virtù del teorema precedente, l'accelerazione sulla tangente AT è:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{R \cos (R, ds)}{m}.$$

Qui non abbiamo dV_x ma sibbene dV poichè la direzione della velocità nel punto A si confonde con la tangente AT.

Dall'ultima equazione deduciamo:

$$dV = \frac{R \cos (R, ds)}{m} dt$$

Oppure: $$mdv = R \cos (R, ds)\, dt.$$

Integrando da 0 fino a t e chiamando V_0 la velocità iniziale del moto

$$m\,V - m\,V_0 = \int_0^t R \cos (R, ds)\, dt.$$

Da dove: $mV - mV_0 = R\cos(R, ds)\, t.$

$mV - mV_0$ rappresenta l'accrescimento, o la variazione della quantità di moto, V essendo la velocità alla fine del tempo t e V_0 la velocità iniziale.

Se la traiettoria AA' fosse rettilinea, la forza R agirebbe nel senso di questa traiettoria; per conseguenza:

$$ang\,(R, ds) = 0$$

$$\cos(R, ds) = 1$$

e $$\int_0^t Rdt = Rt.$$

La variazione della quantità di moto è eguale allora all'impulsione della forza.

Quest'ultimo risultato può ottenersi altrimenti, perchè

$$J = \frac{dV}{dt} = \frac{R}{m}.$$

Da dove:

$$mdV = Rdt.$$

Integrando: $mV - mV_0 = Rt.$

Se $V_0 = 0,$

$$mV = Rt;$$

in questo caso *la quantità di moto è eguale all'impulsione totale della forza.*

La variazione della quantità di moto può annullarsi in due casi, o per $R = 0$, o per $t = 0$. $R = 0$ corrisponde ad un moto che ha luogo in virtù di una certa velocità iniziale e questo caso non si verifica mai nella pratica. Se $t = 0$, ciò significa che si comincia l'osservazione in questo momento stesso; in altri termini $t = 0$ corrisponde all'origine dei tempi.

Teorema.

Quando un punto materiale si muove nello spazio, l'accrescimento della quantità di moto proiettata sopra un asse è eguale

all'impulsione totale della forza proiettata sopra questo medesim'asse.

Se supponiamo che un punto materiale si muova nello spazio sotto l'influenza di una forza R, con una velocità V, se chiamiamo R_x e V_x le proiezioni della forza e della velocità sopra un asse qualunque, abbiamo per l'accelerazione J_x del moto proiettato sull'asse

$$J_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{R_x}{m}.$$

Da dove: $$mdV_x = R_x dt.$$

Integrando da 0 fino a t, chiamando V_0 la velocità iniziale

$$mV_x - mV_{0x} = R_x t.$$

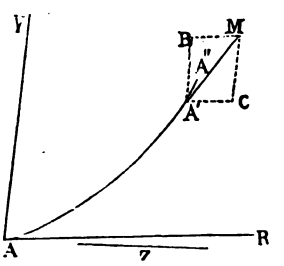
Teorema.

In un moto curvilineo qualunque, la derivata relativamente al tempo del momento preso intorno ad un asse qualunque della velocità, è eguale alla somma dei momenti delle forze presi intorno allo stesso asse divisa per la massa.

Sia la curva $AA'A''$ descritta da un punto materiale nello spazio. Sia AV la direzione della velocità iniziale e AR la direzione della forza applicata al punto A. Per avere la velocità nel punto A', conduciamo $A'B$ parallela ad AV e eguale alla velocità iniziale V_0,

$$A'B = V_0,$$

AC parallela ad AR e eguale a $\frac{R}{m}t$,



$$AC = \frac{R}{m}t$$

e componendo queste due velocità avremo la retta $A'M$ che rappresenta la velocità V' in A'

$$A'M = V'.$$

Prendiamo un asse qualunque Z e prendiamo i momenti di $A'B$, $A'C$, $A'M$ intorno a quest'asse. Sappiamo che

$$\mathcal{M}b_z A'M = \mathcal{M}b_z A'B + \mathcal{M}b_z A'C$$

oppure:

$$\mathcal{M}b_z V' = \mathcal{M}b_z V_0 + \mathcal{M}b_z \frac{R}{m} t,$$

$$\mathcal{M}b_z V' - \mathcal{M}b_z V_0 = \mathcal{M}b_z \frac{R}{m} t.$$

L'equazione sarà sempre soddisfatta qualunque sia il tempo t, dunque:

$$lim \left(\mathcal{M}b_z V' - \mathcal{M}b_z V_0 \right) = lim \ \mathcal{M}b_z \frac{R}{m} t,$$

cioè:

$$d\mathcal{M}b_z V' = \mathcal{M}b_z \frac{R}{m} dt.$$

Da dove:

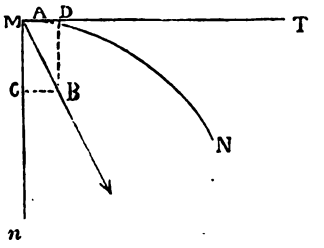
$$\frac{d\mathcal{M}b_z V'}{dt} = \mathcal{M}b_z \frac{R}{m}.$$

Oppure ancora, le forze F essendo le componenti della forza R

$$\frac{d\mathcal{M}b_z V'}{dt} = \mathcal{M}b_z \frac{R}{m} = \Sigma \frac{\mathcal{M}b_z F}{m}.$$

Forza tangenziale e centripeta.

Sia un punto materiale che percorre la traiettoria MN sotto l'influenza di più forze rappresentate dalla resultante R. Supponiamo



il punto materiale in A e la forza R rappresentata in grandezza ed in direzione dalla retta AB. Se nel punto A conduciamo AT tan-

gente alla curva ed *An* perpendicolare ad *AT*, questa perpendicolare è normale alla curva nel punto *A*, è situata nel piano osculatore della curva in questo punto ed è diretta secondo il raggio di curvatura ρ. Proiettando il punto *B* nei punti *C* e *D* che si trovano rispettivamente sulle rette *An* e *AT*, definiremo *forza tangenziale la proiezione AD della forza R sulla tangente AT e forza centripeta la proiezione AC della forza R sopra la normale An.*

Teorema.

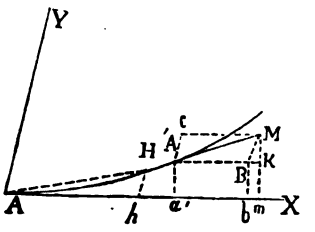
In un moto curvilineo qualunque, l'accelerazione del punto materiale sulla sua traiettoria è eguale alla forza tangenziale divisa per la massa.

Sia *AA'* un elemento di curva infinitamente piccolo. Sia *AX* la direzione della velocità *V*, *AY* quella della forza *R* e *i* l'angolo *YAX*. Per avere la velocità *V'* nel punto *A'*, come precedentemente, prendiamo:

$$A'B = V,$$

$$BM = \frac{R}{m}\, t.$$

Sia α l'angolo che fa la velocità iniziale *V* con la velocità *V'*,



proiettiamo rettangolarmente i punti *A', B, M* sopra *AX* tangente alla curva in *A*, otterremo i punti *a', b, m* ed avremo:

$$a'm = a'b + bm.$$

$a'm$ = proiezione di $A'M = V' \cos\alpha$.

$$a'b = A'B = V,$$

bm = proiezione di $BM = BK = \frac{R}{m}\, t \cos i$.

Dunque:

$$V' \cos\alpha = V + \frac{R}{m} t \cos i.$$

L'equazione è soddisfatta qualunque sia la durata del tempo t, essa lo è anche al limite, cioè quando il punto A' è in A; allora:

$$lim\ V' \cos\alpha = lim\ V + lim \frac{R}{m} t \cos i.$$

L'angolo α essendo infinitamente piccolo, la differenza fra V' e $V' \cos\alpha$ è rappresentata da un infinitamente piccolo del second'ordine, perchè

$$V' \cos\alpha - V' = V' (\cos\alpha - 1) = -2V' sen^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Questa differenza può essere trascurata quando il punto A' si avvicina indefinitamente al punto A ed al limite abbiamo:

$$lim\ V' \cos\alpha = V'.$$

V è una quantità fissa:

$$lim\ V = V.$$

Per l'ultimo termine $lim \frac{R}{m} t \cos i$ abbiamo:

$$lim \frac{R}{m} = \frac{R}{m},$$

$$lim\ t = dt,$$

$$\cos i = \cos (R, AX),$$

considerando un elemento infinitamente piccolo della curva $A'A$ e chiamando dx la sua proiezione sull'asse AX,

$$\cos i = \cos (R, dx).$$

Se conduciamo AH secante alla curva, questa secante è più piccola dell'elemento di curva ds (ds indicando l'elemento di curva AH)

la differenza può essere trascurata la lunghezza AH essendo infinitamente piccola, allora:

$$Ah = dx = ds \cos HAX = ds \cos (ds, dx).$$

Al limite $$ds = dx.$$

Dunque: $$\cos i = \cos (R, dx).$$

$$\lim \cos i = \cos (R, ds).$$

Infine:

$$V' = V + \frac{R}{m} dt \cos (R, ds),$$

$$\frac{V' - V}{dt} = \frac{R}{m} \cos (R, ds).$$

Ma $V' - V$ è l'accrescimento della velocità:

$$\frac{V' - V}{dt} = \frac{dV}{dt},$$

perciò:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{R \cos (R, ds)}{m}.$$

Da dove:

$$m \frac{dV}{dt} = R \cos (R, ds).$$

Questa è l'espressione della forza tangenziale che in un punto qualunque è eguale *all'accelerazione tangenziale molliplicata per la massa.*

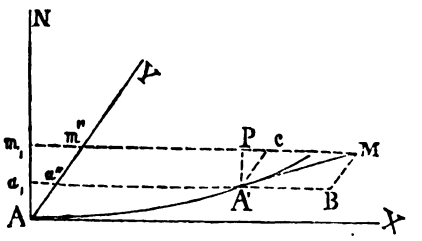
Teorema.

In un moto curvilineo qualunque, la forza centripeta è eguale ad ogni istante al prodotto della massa per il quadrato della velocità, diviso per il raggio di curvatura ρ.

Costruiamo la velocità V' nel punto A' e proiettiamo la linea spezzata $A'BM$ sopra AN che è la direzione del raggio di curvatura ρ, cioè della normale alla curva nel punto A, avremo:

$a_1 m_1 =$ proiezione di $A'M =$ proiezione di $A'BM$,

$a_1 m_1 =$ proiezione di $A'B +$ proiezione di BM.



e poichè $A'M$ e BM sono comprese fra due medesime parallele.

$$\text{proiezione di } A'M = \text{proiezione di } BM.$$

Ora

$$\text{proiezione di } A'M = A'M \cos MA'P.$$

$A'P$ è parallela ad AN, dunque, chiamando α l'angolo che fa $A'M$ con AX,

$$\text{proiezione di } A'M = V' \cos (90° - \alpha) = V' \operatorname{sen}\alpha,$$

$$\text{proiezione di } BM = \text{proiezione di } A'C = a'm'' \cos m''A\, m_1,$$

$$\text{proiezione di } BM = a'm'' \cos (R, AN) = \frac{R}{m}\, t \cos (R, AN)$$

e definitivamente:

$$V' \operatorname{sen}\alpha = \frac{R}{m}\, t \cos (R, AN).$$

Quest'equazione è vera qualunque sia la distanza del punto A' al punto A; avremo perciò:

$$\lim V' \operatorname{sen}\alpha = \lim \frac{R}{m}\, t \cos (R, AN).$$

L'angolo α diventando sempre più piccolo, *sen*α si avvicina sempre più a zero ed al limite il seno si può confondere con l'arco, per conseguenza:

$$lim\ V'\ sen\alpha = V'\alpha,$$

α essendo il valore dell'arco corrispondente all'angolo al centro di raggio 1. Abbiamo dunque al limite:

$$V'\alpha = \frac{R}{m}\, dt\ cos\ (R,\ AN).$$

Moltiplichiamo il primo membro dell'equazione per $\frac{ds}{ds}$ dopo aver tutto diviso per dt,

$$V'\ \frac{\alpha}{ds}\ \frac{ds}{dt} = \frac{R}{m}\ cos\ (R,\ AN).$$

Ma abbiamo

$$\frac{ds}{dt} = V',$$

$$\frac{\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

ρ essendo il raggio di curvatura, o il raggio del circolo osculatore della curva nel punto considerato A, dunque:

$$\frac{V'^2}{\rho} = \frac{R}{m}\ cos\ (R,\ AN).$$

La normale AN alla curva nel punto A si confonde con il raggio di curvatura ρ,

$$cos\ (R,\ AN) = cos\ (R,\ \rho)$$

e per conseguenza:

$$\frac{V'^2}{\rho} = \frac{R}{m}\ cos\ (R,\ \rho)$$

ossia:

$$m\ \frac{V'^2}{\rho} = R\ cos\ (R,\ \rho).$$

Si può dunque trovare la componente tangenziale $m\frac{dV}{dt}$ e la componente centripeta $\frac{mV^2}{\rho}$ di una forza qualunque R per mezzo della velocità del mobile di cui si conosce la massa e la traiettoria, ciò che dà il valore di ρ in ogni punto.

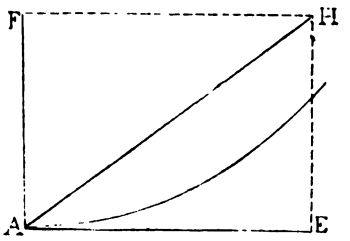
Per il punto A, per esempio, conduciamo una tangente ed una normale alla curva in questo punto e prendiamo:

$$AE = m\frac{dV}{dt},$$

$$AF = \frac{mV^2}{\rho};$$

facendo il parallelogrammo delle forze troviamo:

$$AH = R.$$



Abbiamo di più fra le componenti e la resultante la relazione

$$R^2 = \left(m\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(m\frac{V^2}{\rho}\right)^2.$$

Da dove:

$$R = \sqrt{\left(m\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(m\frac{V^2}{\rho}\right)^2}.$$

Per mezzo delle equazioni

$$m\frac{dV}{dt} = R\cos(R, ds),$$

$$\frac{mV^2}{\rho} = R\cos(R, \rho),$$

si può determinare qual è il moto delle proiezioni del mobile sopra gli assi formati dalla normale e dalla tangente alla curva nello stesso punto.

L'equazione

$$m \frac{dV}{dt} = R \cos (R, ds)$$

dà:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{R \cos (R, ds).}{m}$$

Ma: $\frac{dV}{dt}$ è l'accelerazione tangenziale come pure $\frac{V^2}{\rho}$ è l'accelerazione centripeta. Conoscendo l'accelerazione del moto sopra i due assi, possiamo con due integrazioni successive risalire all'equazione dei moti sopra questi due assi.

Riprendiamo le formule

$$m \frac{dV}{dt} = R \cos (R, ds),$$

$$m \frac{V^2}{\rho} = R \cos (R, \rho).$$

Supponiamo che la forza R agisca nel senso dello spazio percorso ds, avremo:

$$ang (R, ds) = 0,$$

$$\cos (R, ds) = 1,$$

per conseguenza:

$$m \frac{dV}{dt} = R$$

oppure:

$$\frac{R}{m} = \frac{dV}{dt}.$$

Se

$$ang (R, ds) = 0,$$

$$ang (R, \rho) = 90^\circ,$$

$$\cos (R, \rho) = 0,$$

e

$$\frac{mV^2}{\rho} = 0.$$

Ciò doveva essere perchè abbiamo trovato la forza tangenziale eguale alla forza R. Supponiamo ora

$$ang\ (R, ds) = 90°,$$

si trova $$cos\ (R, ds) = 0$$

ed allora:

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

Ma se $$ang\ (R, ds) = 90°,$$

$$ang\ (R, \rho) = 0,$$

$$cos\ (R, \rho) = 1,$$

e per conseguenza:

$$\frac{mV^2}{\rho} = R,$$

risultato da prevedersi poichè in questo caso la forza tangenziale è eguale a zero. Supponiamo in quest'ultimo caso che la velocità V sia una costante come pure la forza R. Il valore di ρ determinato dall'equazione

$$\frac{mV^2}{\rho} = R$$

sarà pure una costante ed avremo:

$$\rho = \frac{mV^2}{R}.$$

La curva dello spazio percorso è dunque in questo caso un arco di circonferenza di circolo; la forza è costante, il movimento è uniformemente variato.

Se abbiamo

$$ang\ (R, ds) = 45°,$$

$$cos\ (R, ds) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

allora avremo pure:

$$ang\ (R, \rho) = 45°,$$

$$cos\ (R, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Abbiamo dunque:

$$\frac{mdV}{dt} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

$$\frac{mV^2}{\rho} = \frac{R}{\sqrt{3}},$$

ne risulta:

$$\frac{mdV}{dt} = \frac{mV^2}{\rho}.$$

e:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V^2}{\rho}.$$

Qui la forza tangenziale è eguale alla forza centripeta e l'accelerazione tangenziale è eguale al quoziente del quadrato della velocità per il raggio di curvatura. Abbiamo veduto in Cinematica che in un moto qualunque il quoziente della velocità V per il raggio di curvatura ρ è la velocità angolare di questo moto, cioè:

$$\frac{V}{\rho} = \omega$$

da dove:

$$V = \omega\rho$$

ed abbiamo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega\rho)}{dt},$$

$$m\,\frac{d(\omega\rho)}{dt} = R\cos(R, ds).$$

Se il moto è circolare, se abbiamo cioè

$$\rho = \text{costante}$$

$$d(\omega\rho) = \rho d\omega:$$

e

$$R\cos(R, ds) = m\rho\,\frac{d\omega}{dt}.$$

L'espressione $\frac{d\omega}{dt}$ chiamasi *l'accelerazione angolare del mobile*

perchè è l'accelerazione tangenziale del punto situato all'unità di distanza dal centro considerato.

Sè nell'equazione

$$\frac{m V^2}{\rho} = R \cos (R, \rho)$$

introduciamo il valore di V,

$$V = \rho\omega,$$

quest'equazione diventa:

$$R \cos (R, \rho) = m\omega^2\rho$$

e se il moto è circolare:

$$R \cos (R, \rho) = m\omega^2 \times \text{costante}.$$

Esprimiamo infine la forza tangenziale in funzione dell'angolo al centro espresso analiticamente.

Sia $d\alpha$ l'angolo al centro infinitamente piccolo e corrispondente allo spazio ds nel circolo di raggio ρ. Sappiamo che si ha

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}.$$

Da dove:

$$ds = \rho d\alpha.$$

Perciò:

$$\frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\alpha}{dt}.$$

Ma $\quad \frac{ds}{dt} = V \quad$ e $\quad \frac{V}{\rho} = \omega.$

Abbiamo dunque:

$$\omega = \frac{\rho \frac{d\alpha}{dt}}{\rho} = \frac{\rho d\alpha}{\rho dt} = \frac{d\alpha}{dt},$$

e l'espressione della forza tangenziale diventa:

$$R \cos (R, ds) = m \frac{d\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}{dt} = m \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Lavoro meccanico delle forze.

Chiamasi *lavoro meccanico* o semplicemente *lavoro di una forza, il prodotto di questa forza per lo spazio percorso dal suo punto d'applicazione e per il coseno dell'angolo che fa la direzione della forza con la traiettoria percorsa dal suo punto d'applicazione.* Abbiamo per definizione:

$$\mathscr{L}F = F\,ds\,\cos\,(F, ds).$$

Il lavoro elementare per un tempo infinitamente piccolo dt è:

$$^{d}\mathscr{L}F = F\,ds\,\cos\,(F, ds).$$

ed il lavoro totale

$$\mathscr{L}F = \int_0^t F\,ds\,\cos\,(F, ds).$$

La formula generale che definisce il lavoro di una forza,

$$\mathscr{L}F = F\,ds\,\cos\,(F, ds),$$

può scriversi

$$\mathscr{L}F = F\cos\,(F, ds)\,ds.$$

$F\cos\,(F, ds)$ è la proiezione della forza F sul cammino percorso ds, oppure, trattandosi d'infinitamente piccoli, se la traiettoria è curvilinea, $F\cos\,(F, ds)$ è la proiezione della forza F sulla tangente alla traiettoria al principio del moto; chiamando P questa proiezione, abbiamo:

$$\mathscr{L}F = P\,ds.$$

Si può allora definire il lavoro di una forza dicendo che *è il prodotto del cammino percorso dal suo punto d'applicazione per la proiezione della forza su questo cammino.*

Riprendiamo la formula

$$\mathscr{L}F = F\,ds\,\cos\,(F, ds).$$

Supponiamo prima di tutto $F > o$ e sia $ang\ (F, ds) < 90°$. In questo caso:

$$cos\ (F, ds) > 0$$

e

$$\mathscr{L}F > 0.$$

Se supponiamo

$$F > 0 \text{ e } ang\ (F, ds) > 90°,$$

$$cos\ (F, ds) < 0,$$

$$\mathscr{L}F < 0.$$

Dunque, la forza essendo sempre la stessa, se l'angolo che fa la direzione di questa forza con la direzione dello spazio percorso è inferiore a 90°, il lavoro meccanico di questa forza è positivo; se invece l'angolo considerato è superiore a 90°, il lavoro è negativo. Nel primo caso dicesi che la forza è *movente* o *motrice;* cioè che agisce nel senso dello spazio percorso dal mobile, nel secondo caso chiamasi *forza resistente* perchè agisce in senso inverso dello spazio percorso.

Supponiamo sempre $F > 0$,

e sia $ang\ (F, ds) = 90°$,

ne risulta $cos\ (F, ds) = 0$,

per conseguenza:

$$\mathscr{L}F = 0.$$

Ciò vuol dire che se la forza che agisce sul punto considerato è perpendicolare allo spazio percorso, il lavoro meccanico di questa forza è eguale a zero; è il caso della *forza centripeta* e della *forza centrifuga* che è eguale e direttamente opposta alla centripeta che studieremo or ora. Queste due forze non hanno nessuna influenza sul moto considerato in se stesso.

Sia sempre $F > 0$

e supponiamo $ang\ (F, ds) = 0$,

ne risulta $cos\ (F, ds) = 1$,

e $\mathscr{L}F = F\,ds.$

Qui l'equazione del lavoro della forza F è semplificata, questa forza confondendosi con la sua proiezione sul cammino percorso ds.

Dopo tutto ciò vediamo che il lavoro di una forza può diventare eguale a zero nei tre casi seguenti:

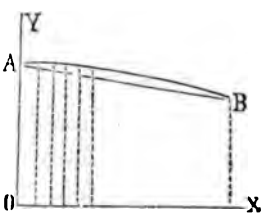
$$F = 0, \quad ds = 0, \quad cos\ (F, ds) = 0.$$

Il lavoro meccanico di una forza può rappresentarsi graficamente.

Prendiamo infatti l'equazione generale:

$$\mathscr{L}F = \int_0^t F\, ds\ cos\ (F, ds)$$

e due assi rettangolari OX, OY. Portiamo sull'asse OX delle lunghezze eguali a ds e da ogni punto così determinato innalziamo delle



perpendicolari portandoci sopra i valori corrispondenti di $F\ cos\ (F, ds)$. Tutte le perpendicolari costruite sull'asse OX sono infinitamente vicine relativamente l'una all'altra. La lunghezza di due perpendicolari successive differisce di un infinitamente piccolo, però congiungendo le loro estremità due a due per mezzo di una retta, possiamo ammettere che questa retta è parallela all'asse OX; costruiremo così un'infinità di rettangoli infinitamente piccoli, ogni rettangolo elementare rappresenterà il prodotto $F\ ds\ cos\ (F, ds)$, congiungendo i vertici di tutti questi rettangoli con una curva continua AB, il lavoro totale sarà dato dalla superficie compresa fra l'asse OX, la curva AB, l'asse OY e l'ultima ordinata a destra.

Se il lavoro di una forza fosse negativo, si farebbe la costruzione qui sopra indicata al disotto dell'asse OX. Se infine si avesse un lavoro positivo e un lavoro negativo, dopo avere costruito al disopra e al disotto dell'asse OX le due superficie che rappresentano i due lavori, si farebbe girare la superficie posta al disotto dell'asse OX per esempio, intorno a quest'asse finchè non venisse ad applicarsi

sul piano della superficie posta al disopra d'OX. La superficie che rappresenta la differenza fra le due superficie costruite, rappresenterà il lavoro definitivo della forza.

Teorema.

Il lavoro della resultante è eguale alla somma algebrica dei lavori delle componenti.

Bisogna dimostrare che: (R essendo la resultante delle forze F)

$$\mathscr{L}R = \Sigma\, \mathscr{L}F.$$

Infatti:

$$\mathscr{L}R = R\, ds\, cos\, (R, ds),$$

$$\Sigma\mathscr{L}F = \Sigma F\, ds\, cos\, (F, ds).$$

$F, cos\, (F, ds)$ è la proiezione della forza F sopra ds, $\Sigma F\, cos\, (F, ds)$ è la somma delle proiezioni di tutte le forze F sopra ds, come pure $R\, cos\, (R, ds)$ è la proiezione della forza R sopra ds. Sappiamo che

$$R\, cos\, (R, ds) = \Sigma F\, cos\, (F, ds).$$

Moltiplicando i due membri dell'equazione per ds:

$$R\, ds\, cos\, (R, ds) = \Sigma F ds\, cos\, (F, ds)$$

cioè:

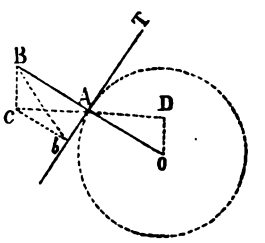
$$\mathscr{L}R = \Sigma\, \mathscr{L}F.$$

Teorema.

Il lavoro elementare di una forza nella semplice rotazione del suo punto d'applicazione intorno ad un asse è eguale al momento della forza preso intorno a quest'asse, moltiplicato per lo spostamento angolare di detto punto d'applicazione.

Supponiamo la forza F che agisce sul punto A, non possa imprimere a questo punto altro che un moto di rotazione intorno all'asse O perpendicolare al piano nel quale si eseguisce la rotazione.

Nel punto considerato A supponiamo la forza F rappresentata dalla retta AB. Conduciamo nel piano del circolo la tangente alla circonferenza in A e proiettiamo rettangolarmente la forza F sopra questa tangente; per ciò, dal punto B dello spazio condurremo BC



perpendicolare al piano del circolo, poi dal punto C, Cb perpendicolare sopra AT. Il piano ABb è perpendicolare sopra la tangente AT, in conseguenza:

$$Ab = \text{proiezione di } F = F \cos (F, ds).$$

Congiungiamo i punti C e A, la linea CA è la proiezione della forza F sul piano di rotazione; indichiamo questa proiezione con la lettera P: se nel piano di rotazione consideriamo la forza $P = AC$, vediamo che:

$$Ab = \text{proiezione di } P = P \cos (P, ds).$$

Abbiamo dunque:

$$F \cos (F, ds) = P \cos (P, ds).$$

Moltiplicando i due membri all'equazione per ds:

$$F\,ds \cos (F, ds) = P\,ds \cos (P, ds).$$

Il lavoro della forza dello spazio è lo stesso di quello della sua proiezione situata nel piano di rotazione.

Prolunghiamo AC e conduciamo OD perpendicolare sopra questa linea. Abbiamo:

$$\text{ang } CAT = \text{ang } DOA$$

poichè questi due angoli hanno i loro lati rispettivamente perpendicolari due a due; in conseguenza:

$$cos\ CAT = cos\ (P, ds) = cos\ DOA = cos\ (p, r),$$

chiamando p e r le linee OD e OA

$$P\ ds\ cos\ (P, ds) = P\ ds\ cos\ (p, r).$$

Ma nel triangolo OAD abbiamo:

$$cos\ (p, r) = cos\ DOA = \frac{OD}{OA} = \frac{p}{r}.$$

Dunque

$$P\ ds\ cos\ (P, ds) = P\ ds\ \frac{p}{r} = P\ p\ \frac{ds}{r}.$$

$\frac{ds}{r}$ è lo spostamento angolare $d\alpha$, perciò:

$$P\ ds\ cos\ (P, ds) = P\ p\ d\alpha$$

e definitivamente,

$$F\ ds\ cos\ (F, ds) = P\ p\ d\alpha,$$

ossia: $$\mathscr{L}F = \mathscr{M}_0 F\ d\alpha.$$

Unità di lavoro meccanico.

L'unità di lavoro corrisponde al valore che prende l'espressione quando abbiamo

$$F = 1 = \textit{unità di forza},$$
$$ds = 1 = \textit{unità di cammino},$$
$$cos\,(F\ ds) = 1,$$

allora:

$$\mathscr{L}F = F\ ds\ cos\ (F, ds) = 1.$$

In pratica, l'unità di forza è il *chilogramma*, l'unità di spazio il *metro*, dimodochè l'unità di lavoro si ottiene moltiplicando 1 chi-

logramma per 1 metro; quest'unità di lavoro chiamasi *chilogrammetro,* corrisponde al lavoro necessario per innalzare il peso di un chilogramma all'altezza di un metro nell'unità di tempo.

Potenza viva.

Chiamasi *potenza viva il semi-prodotto della massa d'un corpo per il quadrato della velocità nell'istante considerato.*

Teorema.

L'accrescimento della potenza viva di un punto materiale che si muove per un certo tempo è eguale alla somma dei lavori delle forze che agiscono in tutto questo tempo.

Infatti la forza tangenziale ha per espressione:

$$m\frac{dV}{dt} = R\cos(R, ds),$$

moltiplicando il primo membro dell'equazione per $\frac{ds}{ds}$,

$$m\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dV}{ds} = R\cos(R, ds).$$

Ma $$\frac{ds}{dt} = V.$$

Dunque:

$$\frac{mVdV}{ds} = R\cos(R, ds),$$

oppure:

$$mVdV = R\,ds\cos(R, ds) = d\mathscr{L}R.$$

Integrando relativamente al tempo fra i limiti t e 0 si ha:

$$\int_0^t mVdV = \int_0^t d\mathscr{L}R.$$

V indicando la velocità finale corrispondente al tempo t e V_0 la

velocità iniziale corrispondente al tempo $t = 0$, abbiamo effettuando l'integrazione

$$\frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = \mathscr{L}R = \Sigma \mathscr{L}F$$

Se il mobile partisse dal riposo:

$$V_0 = 0$$

ed in questo caso

$$\frac{1}{2} m V^2 = \mathscr{L}R = \Sigma \mathscr{L}F.$$

Dunque *quando la velocità iniziale è nulla, la potenza viva finale è eguale alla somma dei lavori delle forze;* come questa potenza viva è conosciuta quando si conosce la velocità V del mobile e la sua massa m, così possiamo subito calcolare il lavoro di una forza per mezzo dell'effetto che produce.

Se nell'equazione

$$\frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m V_0^2 = \Sigma \mathscr{L}F.$$

avessimo $V = V_0$,

ne risulterebbe:

$$\Sigma \mathscr{L}F = 0.$$

Ciò non può aver luogo che se vi sono delle forze che agiscono le une in un senso e le altre in senso contrario al primo: chiamando P la resultante delle forze che agiscono in un senso e Q la resultante di quelle che agiscono in senso contrario, avremo:

$$\Sigma \mathscr{L}F = \mathscr{L}P - \mathscr{L}Q.$$

e come

$$\Sigma \mathscr{L}F = 0,$$

$$\mathscr{L}P - \mathscr{L}Q = 0,$$

$$\mathscr{L}P = \mathscr{L}Q.$$

Si può dunque dire, che *quando* $V = V_0$, *nel tempo considerato il lavoro delle forze moventi è eguale al lavoro delle forze resistenti.*

Se il moto osservato fosse circolare, avremmo per il lavoro elementare delle forze F:

$$d\Sigma\, \mathscr{L}F = \Sigma\, \mathscr{M}_0\, F\, d\alpha,$$

in conseguenza il lavoro totale delle forze F nel tempo t sarebbe

$$\Sigma\, \mathscr{L}F = \int_0^t \Sigma\, \mathscr{M}_0\, F\, d\alpha.$$

D'altronde

$$V = \omega r$$

e similmente:

$$V_0 = \omega_0 r,$$

ω e ω_0 essendo le velocità angolari del mobile alla fine ed al principio del tempo t, perciò:

$$\frac{1}{2} mV^2 - \frac{1}{2} mV_0^2 = \frac{1}{2} m(V^2 - V_0^2) = \frac{1}{2} mr^2\, (\omega^2 - \omega_0^2).$$

Abbiamo così l'accrescimento di potenza viva misurato dalla velocità angolare per un punto qualunque del sistema situato ad una distanza r dell'asse di rotazione.

L'equazione

$$\frac{1}{2} mr^2\, (\omega^2 - \omega_0^2) = \int \mathscr{M}_0\, F\, ds$$

si applica per più semplicità ad un solo giro del mobile intorno all'asse considerato; prenderemo perciò l'integrale fra i limiti 0 e 2π, l'equazione diventa allora:

$$\frac{1}{2} mr^2\, (\omega^2 - \omega_0^2) = \int_0^{2\pi} \mathscr{M}_0\, F\, ds.$$

Capitolo III.

Moto di un punto materiale non libero.

Un punto materiale è non libero quando qualunque sieno le circostanze nelle quali si trova, il suo moto deve sempre soddisfare a certe condizioni date.

Il moto di un punto materiale libero è puramente teorico e non è altro che un mezzo impiegato per più facilmente studiare il moto dei corpi che ci circondano. Tutti i corpi di qualunque natura essi sieno, sono sottomessi all'azione di una forza costante in intensità ed in direzione per uno stesso luogo. Questa forza che agisce su tutti i punti della terra merita una menzione particolare, essa chiamasi la *gravità*.

Teoricamente, quando un punto materiale non è libero, vuol dire che in generale è astretto a restare sempre sopra una curva fissa a una superficie pure fissa.

La gravità è una forza che attira tutti i corpi verso il centro della terra e in virtù della quale cadono sulla sua superficie se non sono sorretti. Questa forza è un caso particolare dell'attrazione universale. La direzione della gravità in un luogo qualunque è data dalla direzione del filo a piombo e chiamasi la verticale del luogo considerato.

Le esperienze fatte sui gravi nel vuoto hanno provato che:

1. *Il moto è rettilineo e uniformemente variato.*

2. *L'accelerazione è costante e eguale per tutti i corpi in un medesimo luogo.*

3. *L'accelerazione varia di quantità piccolissime con la latitudine e la distanza del punto materiale considerato al centro della terra.*

L'accelerazione prodotta dalla gravità s'indica generalmente con la lettera g. Sotto la latitudine di Parigi abbiamo:

$$g = 9{,}8088$$

e all'equatore

$$g = 9{,}78$$

Questi valori di g possono determinarsi approssimativamente per mezzo delle macchine di Awtood e di Morin, o per mezzo del piano inclinato; il valore più approssimativo in un luogo dato si ottiene servendosi del pendolo.

Il valore di g cresce dall'equatore al polo proporzionalmente al quadrato del seno della latitudine.

Quando un corpo s'innalza di una certa quantità al disopra della superficie terrestre, la gravità non può essere più considerata come una forza costante, essa segue le leggi della gravitazione universale e varia perciò in ragione inversa del quadrato della distanza del corpo al centro della terra, cioè g essendo l'accelerazione prodotta dalla gravità e g' l'accelerazione ad una altezza h al disopra della superficie terrestre, R il raggio della terra considerata come sferica, si deve avere, poichè le accelerazioni sono proporzionali alle forze

$$g' : g :: R^2 : (R+h)^2.$$

Da dove:

$$g' = g\frac{R^2}{(R+h)^2} = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = g\left(1+\frac{R}{h}\right)^2$$

$$g' = g \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = g\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}$$

Ma se l'altezza h non è troppo forte in modo che si possa trascurare relativamente all'unità il quadrato del rapporto $\frac{h}{R}$, si può scrivere semplicemente e fermandosi al secondo termine

$$g' = g\left(1-\frac{2h}{R}\right).$$

Peso dei corpi.

Un corpo cadendo nel vuoto secondo una linea retta, ne risulta che è sottomesso ad una forza costante che abbiamo veduto essere la gravità. Questa forza costante quando è applicata ad un corpo qualunque, chiamasi *il peso* di questo corpo; diremo che *il peso*

di un punto materiale in un luogo determinato è la forza capace d'imprimergli, cadendo nel vuoto, l'accelerazione del moto verticale. La somma dei pesi dei differenti punti materiali che compongono il corpo formano il suo peso nel luogo considerato.

Relazione fra la massa, l'accelerazione e il peso d'un corpo.

Abbiamo l'equazione

$$m = \frac{F}{J},$$

applicandola ad un corpo che cade nel vuoto la forza F diventa il peso P e l'accelerazione J diventa g; abbiamo dunque:

$$m = \frac{P}{g}.$$

Perciò possiamo dire che *la massa di un corpo in un luogo considerato è il quoziente del suo peso per l'accelerazione g.*

Teorema.

I pesi dei corpi sono proporzionali alle loro masse e reciprocamente.

L'equazione $m = \frac{P}{g}$,

dà $P = mg.$

Come pure $P_1 = m_1 g.$

Supponendo che ambedue i corpi sieno nello stesso luogo:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{m}{m_1}.$$

L'equazione $m = \frac{P}{g}$,

dà: $g = \frac{P}{m}.$

Se l'unità di massa è $m = 1$,

si ottiene: $g = \frac{P}{1} = P.$

Ciò vuol dire che l'intensità dell'accelerazione g **in un luogo** dato è eguale al peso, o alla forza necessaria per imprimere **all'u**nità di massa un moto la cui accelerazione è **eguale a** g.

Unità di peso e di forza.

Sappiamo che la massa d'un corpo è una costante e per definizione si ha:

$$m = \frac{F}{g}.$$

In un medesimo luogo g è pure una costante e perciò il prodotto mg sarà pure costante; questo prodotto mg è il peso del corpo poichè dall'equazione

$$m = \frac{P}{g},$$

deduciamo:

$$P = mg$$

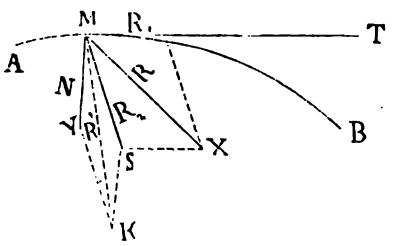
Dunque *il peso dei corpi è costante in uno stesso luogo.* Ne risulta che si è cercato di paragonare le intensità di tutte le forze al peso dei corpi che è una forza essa pure e proveniente dalla gravità che è costante in uno stesso luogo. Si paragonano gli effetti delle forze con gli effetti della gravità, così prendiamo per unità di forza l'unità di peso, ed il chilogrammo essendo l'unità di peso, è pure l'unità di forza.

Le variazioni della gravità nei differenti punti della superficie terrestre non influendo per nulla sulle equazioni meccaniche ed essendo d'altronde piccolissime, si ammette in pratica che la gravità ha dappertutto la stessa intensità.

Moto di un punto materiale astretto a restare sopra una curva fissa.

Sia la curva AB ed un punto M sopra questa curva che può prendere un moto qualunque purchè resti sopra la curva. Sia R la resultante delle forze F applicate al punto M indipendentemente

però dalla reazione della curva AB sul punto M, reazione che indicheremo con la lettera N. La forza N, in qualunque posizione si trovi il punto M sulla curva AB, è diretta sempre secondo la perpendicolare alla tangente alla curva in questo punto, è normale cioè alla curva. Possiamo considerare il mobile come libero e movendosi sotto l'azione delle forze R e N. Decomponiamo la forza R, rappresentata dalla retta MX, in due componenti R_1 e R_2 delle quali



l'una sia diretta secondo la tangente MT e l'altra secondo una perpendicolare MS a questa tangente. Ciò fatto, componiamo la forza R_2 o MS con la forza N rappresentata dalla retta MY; avremo così la forza R' rappresentata dalla retta MK. Dunque abbiamo due forze R_1 e R' che si sostituiscono alle forze R e N. Le forze R_1 e R' sono la forza tangenziale e centripeta; perciò V essendo la velocità del mobile, m la sua massa, abbiamo:

$$m \frac{dV}{dt} = R \cos (R, ds),$$

$$m \frac{V^2}{\rho} = R \cos (R, \rho).$$

Per determinare ora la natura del moto del punto M sulla curva AB, opereremo come nel caso di un punto materiale libero tenendo conto della reazione N della curva sul punto materiale. Tutti i teoremi dimostrati sul moto di un punto materiale libero sono applicabili al moto di un punto materiale astretto a percorrere una curva fissa, purchè si tenga conto della reazione N.

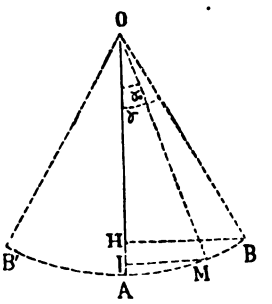
Pendolo semplice.

Il pendolo semplice è un istrumento ideale formato di un punto materiale pesante sospeso ad un punto fisso per mezzo di un filo inestensibile e senza peso.

Quando il pendolo è in riposo prende una posizione verticale *OA;* se si sposta per condurlo da questa posizione *OA* nella posizione *OB* per esempio, se quindi si abbandona a se stesso, non riprende la posizione iniziale perchè in virtù della velocità acquistata continua il suo moto e prende una posizione *OB';* da questa posizione *OB'* torna nella posizione *OB* e così via di seguito il pendolo eseguisce una serie d'oscillazioni che sarebbe infinita se diverse cause non venissero ad alterare, per distruggerlo poi definitivamente, il moto.

Come esempio del moto di un punto materiale non libero, studiamo le leggi che presiedono alle oscillazioni del pendolo semplice.

Siano l la lunghezza OA d'un pendolo semplice, p ed m il peso e la massa del punto materiale A, α_0 l'angolo che misura lo spostamento iniziale, OM la posizione che avrà preso il pendolo alla fine di un certo tempo t e α l'angolo che corrisponde a questa posizione.



Il punto materiale A è sottomesso a due forze: il suo peso p e la tensione del filo: questa tensione esercitandosi secondo il raggio MO, cioè normalmente all'arco di circonferenza percorso dal punto A, il suo lavoro elementare è sempre eguale a zero e non entrerà perciò nell'equazione del lavoro. Il lavoro della forza p in tutto il

tempo che è scorso dal momento in cui il mobile era in B fino al momento in cui è venuto in M è:

$$pHI = p\ (OI - OH) = pl\ (\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

ma

$$p = mg,$$

perciò:

$$pHI = mgl\ (\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

Quando il mobile è arrivato in B, la sua velocità è eguale a zero, l'accrescimento della sua potenza viva si riduce dunque a quella che ha quando è in M, cioè a $\frac{1}{2} mV^2$, V essendo la velocità del mobile nel punto M; abbiamo dunque:

$$\frac{1}{2} mV^2 = mgl\ (\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

Da dove:

$$(1) \qquad V = \sqrt{2gl\ (\cos\alpha - \cos\alpha_0)}.$$

Quest'equazione fa conoscere la velocità del mobile in un punto qualunque, essa è massima quando il valore di $\cos\alpha$ è pure massimo, cioè quando $\alpha = 0$; ciò corrisponde alla posizione verticale del pendolo. La velocità V diventa eguale a zero anche quando

$$\cos\alpha = \cos\alpha_0$$

ciò che suppone:

$$\alpha = \pm \alpha_0:$$

questo significa che quando il mobile è in B od in B' la sua velocità è eguale a zero; questa velocità aumenta quando il mobile si avvicina alla posizione iniziale OA ed è massima quand'occupa questa posizione.

Per conoscere completamente il moto del punto A sopra l'arco di circonferenza, bisogna sapere qual è il tempo che impiega per passare dalla sua posizione iniziale ad una posizione qualunque.

Chiamando s l'arco BM, abbiamo:

$$V = \frac{ds}{dt},$$

di più

$$s = AB = AM = l\ (\alpha_0 - \alpha)$$

perciò:

$$ds = -l\ d\alpha;$$

$$V = -l \frac{d\alpha}{dt}.$$

Mettiamo questo valore di V nell'equazione (1)

$$-l\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{2gl\,(cos\alpha - cos\alpha_0)},$$

da dove:

$$-l\,d\alpha = dt\sqrt{2gl\,(cos\alpha - cos\alpha_0)}$$

e

$$dt = \frac{-l\,d\alpha}{\sqrt{2gl\,(cos\alpha - cos\alpha_0)}}$$

semplificando:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{-d\alpha}{\sqrt{2\,(cos\alpha - cos\alpha_0)}}.$$

Integrando fra i limiti α_0 e α:

$$t = -\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{2\,(cos\alpha - cos\alpha_0)}},$$

e come il tempo non può essere negativo

$$(2)\qquad t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{2\,(cos\alpha - cos\alpha_0)}}$$

Quando l'angolo α_0 o lo spostamento iniziale che chiamasi anche l'*ampiezza dell'oscillazione* è piccolissimo, l'angolo α è pure piccolissimo e l'equazione (2) può semplificarsi. Abbiamo infatti, sviluppando in serie $cos\alpha_0$,

$$cos\alpha_0 = 1 - \frac{\alpha_0^2}{1\,.\,2} + \frac{\alpha_0^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots;$$

α_0 essendo piccolissimo possiamo trascurare le potenze superiori alla seconda e scrivere perciò:

$$cos\alpha_0 = 1 - \frac{\alpha_0^2}{1 \cdot 2};$$

per la stessa ragione

$$cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2},$$

da dove:

$$2\,(cos\alpha - cos\alpha_0) = \alpha_0^2 - \alpha^2,$$

per conseguenza:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\alpha}^{\alpha_0} \frac{\alpha_0\, ds}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}},$$

integrando:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left(arc\ sin\ 1 - arc\ sin \frac{\alpha}{\alpha_0} \right). \tag{3}$$

Volendo avere il tempo impiegato dal pendolo per tornare dalla posizione OB alla verticale, bisogna in questa formula fare $\alpha = 0$, ciò che dà

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\ (arc\ sin\ 1 - arc\ sin\ 0).$$

Ma

$$arc\ sin\ 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$arc\ sin\ 0 = 0.$$

Dunque:

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Se si volesse il tempo impiegato dal pendolo per giungere alla posizione OB' simetrica della posizione OB relativamente alla verticale, bisognerebbe fare $\alpha = -\alpha_0$; chiamando T questo tempo, avremmo:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{4}$$

Questo tempo T è il doppio del precedente; dunque il pendolo impiega lo stesso tempo per discendere dalla posizione *OB* alla posizione *OA* che per risalire dalla posizione *OA* alla posizione *OB'*.

L'equazione (4) è conosciuta sotto il nome di *formula del pendolo;* essa è indipendente dallo spostamento iniziale α_0 che chiamasi *ampiezza dell'oscillazione* purchè sia piccolissimo; se ne conclude in quest'ultimo caso, che le oscillazioni del pendolo diventano *isocrone* cioè di stessa durata: ciò offre un vantaggio prezioso per la misura del tempo.

La formula del pendolo mostra che la durata d'un'oscillazione è direttamente proporzionale alla radice quadrata della lunghezza del pendolo; se la lunghezza del pendolo diventa 4, 9, 16, 25 volte ecc. più grande, la durata dell'oscillazione diventa 2, 3, 4, 5 volte più lunga. Questa formula mostra pure che se facciamo oscillare lo stesso pendolo in differenti punti del globo dove l'accelerazione g non ha pertutto lo stesso valore, la durata di un'oscillazione è in ragione inversa della radice quadrata di g.

Sia n il numero delle oscillazioni eseguite dal pendolo in un tempo t', abbiamo

$$t' = nT,$$

da dove:

$$T = \frac{t'}{n};$$

mettendo questo valore di T nella formula del pendolo, otteniamo:

$$\frac{t'}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Innalzando al quadrato i due membri dell'equazione:

$$\frac{t'^2}{n^2} = \pi^2 \frac{l}{g},$$

oppure:

$$t'^2 g = \pi^2 n^2 l,$$

da dove:

$$g = \frac{\pi^2 n^2 l}{t'^2}.$$

L'accelerazione dovuta alla gravità in un luogo dato del globo e proporzionale al quadrato del numero delle oscillazioni eseguite

in un tempo dato; se questo tempo è un'ora o 3600 *secondi*, abbiamo

$$g = \frac{\pi^2}{3600^2} l\, n^2 = 0{,}0008726\, l\, n^2.$$

La lunghezza del pendolo semplice si deduce dalla formula del pendolo supponendovi

$$T = \frac{1}{n},$$

troviamo: $$l = \frac{g}{\pi^2};$$

a Parigi dove

$$g = 9{,}8088,$$

$$l = \frac{9{,}8088}{(3{,}1416)^2} = 0{,}99384.$$

Se lo spostamento α_0 non è abbastanza piccolo per poter trascurare le potenze di α_0 superiori alla seconda, non possiamo più integrare l'equazione (2) sotto forma finita e non possiamo ottenere l'espressione che dà il valore di t se non sviluppando in serie; troviamo allora, chiamando h la distanza AH, che è eguale a $l\,(1 - cos\ \alpha_0)$

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{h}{2l} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^3 + \ldots\right]$$

Qui la durata delle oscillazioni non è più indipendente dallo spostamento iniziale perchè h, che ne dipende, entra nella formula.

Se si può trascurare il quadrato del rapporto $\frac{h}{2l}$, resta:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{8}\cdot\frac{h}{l}\right).$$

Ma $$\frac{h}{l} = 1 - cos\alpha_0 = 2\, sen^2\frac{1}{2}\alpha_0.$$

Possiamo dunque scrivere:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha_0\right),$$

trascurando una quantità che racchiuderebbe la 4ª potenza di $\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha_0$.

Moto di un punto materiale astretto a restare sopra una superficie fissa.

Il punto esercita ad ogni istante sulla superficie una pressione normale che possiamo facilmente calcolare; opereremo perciò come nel caso di un punto materiale astretto a muoversi sopra una curva fissa; comporremo cioè tutte le forze applicate al punto materiale eccettuatane la reazione della superficie su questo punto; decomporremo quindi la resultante trovata in due forze, l'una tangente alla traiettoria del mobile nel punto considerato e l'altra perpendicolare a questa tangente, cioè normale alla traiettoria; la pressione esercitata dal punto materiale sopra la superficie fissa è la resultante della componente normale e della forza centrifuga che si sviluppa nel moto.

Tutti i teoremi applicabili ad un punto materiale libero lo sono pure ad un punto astretto a muoversi sopra una superficie fissa, purchè si tenga conto della reazione di questa superficie fissa sul punto mobile.

DINAMICA DEI SISTEMI MATERIALI

Chiamasi *sistema materiale un insieme di punti materiali.* Le forze che agiscono sopra un sistema materiale possono dividersi in due grandi categorie:

1° *Forze interne*

2° » *esterne.*

Le forze interne sono quelle *che esercitano i punti materiali componenti un sistema materiale gli uni sopra gli altri;* queste forze chiamansi ancora *forze mutue, elastiche, molecolari.*

Le forze esterne sono quelle *che si esercitano fra due sistemi materiali distinti.*

In virtù del principio dell'azione e della reazione, le forze molecolari sono eguali due a due e di segni contrari.

Nella meccanica applicata si verifica che in un corpo o sistema materiale le forze interne variano insieme alle forze esterne e con lo stato di moto o di quiete del corpo. Per spiegare questo fenomeno bisogna ammettere la legge della gravitazione universale scoperta da Newton e che si deduce dalle tre leggi di Kepler sul moto dei pianeti intorno al sole. Queste tre leggi sono le seguenti:

1° *I pianeti descrivono intorno al sole delle ellissi, questo astro trovandosi ad uno dei loro fuochi.*

2° *Le superfici delle porzioni d'ellisse percorse successivamente dal raggio vettore che va da un pianeta al sole, stanno fra loro come i tempi impiegati a percorrerle.*

3° *I quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti intorno al sole sono proporzionali ai cubi dei grandi assi delle loro orbite.*

La legge della gravitazione universale dedotta dalle leggi di Kepler è la seguente:

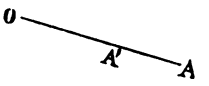
Due corpi si attirano in ragione diretta delle loro masse ed in ragione inversa dei quadrati delle loro distanze.

Esiste fors'anche un'altra causa che influisce sul modo d'agire delle forze interne: quest' altra causa è il calore che fa sì che le molecole di uno stesso corpo si respingono ma secondo una legge differente da quella della gravitazione universale.

Dunque ogni punto materiale è sottomesso a due generi di forze, le une attrattive e le altre ripulsive; lo stato fisico del corpo si modifica secondo il genere di forze che predomina.

Le forze molecolari variano secondo la loro posizione nel sistema materiale.

Supponiamo un corpo che gira intorno all'asse O e siano due punti di questo corpo A ed A' ad una distanza r ed r' dell'asse di rotazione O.



Supponiamo il moto uniforme; la forza tangenziale è eguale a zero, resta solo la forza centripeta rappresentata, chiamando V la velocità lineare del corpo e ω la sua velocità angolare;

per il punto A, da $\frac{m V^2}{r} = m \omega^2 r$,

per il punto A', da $\frac{m V^2}{r'} = m \omega^2 r'$.

Dunque la forza centripeta nei punti A ed A' non è eguale quantunque proveniente da uno stesso moto; ammetteremo nulladimeno che i solidi sono invariabili, cioè che le forze molecolari di un corpo sono sempre eguali due a due e di segni contrari qualunque sia il moto di questo corpo e la natura delle forze che gli si applicano.

In un sistema materiale così concepito tutti i punti che lo compongono restano sempre a delle distanze fisse gli uni dagli altri e non si tien conto perciò delle forze molecolari.

I teoremi stabiliti per un punto materiale sono veri anche per un solido o sistema di punti materiali. Dimostreremo i principali teoremi soltanto.

Teorema dell'impulsione proiettata.

L'accrescimento della somma delle quantità di moto proiettato sopra un asse qualunque è eguale alla somma delle impulsioni delle forze esterne proiettate sopra questo medesim' asse.

Sia M la massa di un sistema materiale composto di un'infinità di punti materiali di massa m, in modo che

$$M = \Sigma m.$$

Sia F la forza esterna che agisce sopra un punto di massa m e che imprime a questo punto una velocità V, f la resultante delle forze elastiche applicate a questo stesso punto. Se R è la resultante delle forze F e f e se chiamiamo R_x, F_x, f_x, V_x le proiezioni sull'asse delle x delle forze R, F, f e della velocità V, avremo per un punto materiale:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{R_x}{m}.$$

Ma

$$R_x = F_x + f_x,$$

dunque:

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{F_x + f_x}{m},$$

$$dV_x = \frac{F_x\,dt}{m} + \frac{f_x\,dt}{m},$$

$$m\,dV_x = F_x\,dt + f_x\,dt.$$

Per un altro punto di massa m' e sollecitato dalle forze F' e f' avremmo:

$$m'\,dV_x = F'_x\,dt + f'_x\,dt$$

e così via di seguito per tutti i punti componenti il sistema. Addizionando tutte queste eguaglianze membro a membro, si ottiene:

$$\Sigma\, m\, dV_x = \Sigma\, F_x\, dt + \Sigma\, f_x\, dt.$$

Abbiamo già detto che per causa del modo d'agire delle forze molecolari, queste forze si distruggono, dunque:

$$\Sigma\, f_x\, dt = 0;$$

di più $$\Sigma\, m\, dV_x = M\, dV_x.$$

Dunque:

$$M\, dV_x = \Sigma\, F_x\, dt.$$

Integrando, se chiamiamo V_0 la velocità iniziale del sistema e perciò V_{ox} la sua proiezione sull'asse delle x, si ottiene:

$$M\, V_x - M\, V_{0x} = \Sigma\, F_x\, t.$$

Teorema delle quantità di moto.

L'accrescimento della somma dei momenti delle quantità di moto di un sistema materiale che gira intorno ad un asse qualunque è eguale alla somma dei momenti delle forze esterne, nello stesso tempo.

Per un punto materiale abbiamo:

$$d\,\mathcal{M}_0\, mV = \mathcal{M}_0\, R\, dt.$$

Per un punto qualunque del sistema, F essendo la resultante delle forze esterne che agiscono su questo punto e f la resultante delle forze interne che agiscono su questo stesso punto, avremo:

$$R = F + f$$

e per conseguenza:

$$d\,\mathcal{M}_0\, mV = \mathcal{M}_0\, F\, dt + \mathcal{M}_0\, f\, dt$$

e per il sistema materiale:

$$\Sigma d\,\mathcal{M}_0\, mV = \Sigma\,\mathcal{M}_0\, F\, dt + \Sigma\,\mathcal{M}_0\, f\, dt,$$

le forze f sono eguali due a due e di segni contrari, lo stesso è dei loro momenti, perciò:

$$\Sigma \mathcal{M}_0 f = 0:$$

l'equazione si riduce a

$$\Sigma d \mathcal{M}_0 V = \Sigma \mathcal{M}_0 F dt.$$

Integrando e chiamando V_0 la velocità iniziale:

$$\Sigma \mathcal{M}_0 mV - \Sigma \mathcal{M}_0 mV_0 = \int_0^t \Sigma \mathcal{M}_0 F dt.$$

Teorema delle potenze vive.

***Qualunque** sia il moto del sistema materiale considerato, l'accrescimento algebrico della potenza viva del sistema dopo uno spostamento qualunque è eguale alla somma algebrica dei lavori delle forze tanto interne che esterne che agiscono sugli elementi del sistema.*

Sia un sistema di massa M composto d'elementi di massa m. Sia V_0 la velocità iniziale del sistema e V la sua velocità finale; chiamiamo F la resultante delle forze esterne che agiscono sopra un elemento del sistema materiale considerato e f la resultante delle forze interne che agiscono sopra questo stesso elemento.

Un punto materiale che fa parte di un sistema essendo considerato isolatamente, la forza interna f diventa esterna, possiamo quindi applicare a questo punto di massa m il teorema della potenza viva e scrivere:

$$\frac{1}{2} mV^2 - \frac{1}{2} mV_0^2 = \mathcal{L}F + \mathcal{L}f.$$

Per un altro punto di massa m' e sollecitato dalle forze F' e f', avremmo:

$$\frac{1}{2} m'V^2 - \frac{1}{2} m'V_0^2 = \mathcal{L}F' + \mathcal{L}f',$$

così pure:

$$\frac{1}{2} m''V^2 - \frac{1}{2} m''V_0^2 = \mathcal{L}F'' + \mathcal{L}f'',$$

. . . . . .

Addizionando tutte queste eguaglianze membro a membro,

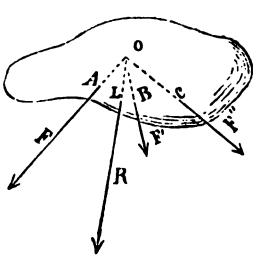
$$\Sigma \frac{1}{2} mV^2 - \Sigma \frac{1}{2} mV_0^2 = \Sigma \mathscr{L}F + \Sigma \mathscr{L}f,$$

$$\frac{1}{2} MV^2 - \frac{1}{2} MV_0^2 = \Sigma \mathscr{L}F + \Sigma \mathscr{L}f.$$

Composizione delle forze concorrenti.

Quando fra le forze che agiscono sopra un solido invariabile ve ne sono diverse F, F', F'' le cui direzioni concorrono tutte in uno stesso punto O, queste forze F, F', F'' possono essere sostituite da una forza unica che è la loro resultante.

Infatti ognuna di queste forze può essere trasportata dal punto sul quale essa agisce in un punto preso sulla sua direzione; allora, poichè queste forze agiscono sopra uno stesso punto *O*, possono essere



composte in una sola per mezzo del parallelogrammo delle forze se sono due, del parallelepipedo delle forze se tre, ed infine del poligono delle forze se ne abbiamo più di tre.

La resultante *R* così ottenuta può d'altronde essere applicata in un punto qualunque *L* della sua direzione. Dunque la forza *R* applicata al punto *L* produce lo stesso effetto delle forze *F, F,' F''* riunite ed applicate ai differenti punti del solido, *A, B, C.*

Fin qui abbiamo parlato solo della composizione delle forze concorrenti; s'incontrano però anche delle forze che agiscono se-

condo delle direzioni parallele; ci occuperemo della loro composizione nella statica e dimostreremo:

1° *Che tutte le forze che agiscono sopra un sistema materiale qualunque possono sempre essere sostituite da due forze, l'una di esse passando da un punto dato e seguendo una direzione data.*

2° *Un gruppo di forze applicate ad un sistema materiale può essere sempre sostituito da una forza unica passante da un punto dato e da due forze parallele, eguali e di senso contrario.*

STATICA

Capitolo I.

Equilibrio dei corpi.

Un corpo *è in equilibrio quando è in riposo;* oppure, quando le forze che gli sono applicate soddisfano alle stesse condizioni come se il corpo fosse in riposo; chiameremo queste condizioni, *condizioni d'equilibrio.*

Supponiamo in primo luogo che si tratti di un solo punto materiale. Due casi possono presentarsi. Il punto materiale è libero, cioè può spostarsi nello spazio secondo una direzione qualunque; il punto materiale non è libero, cioè non gli è possibile di muoversi nello spazio secondo certe direzioni.

Equilibrio di un punto materiale libero.

Perchè un punto materiale libero sia in equilibrio è necessario e sufficiente che la resultante di tutte le forze che gli sono applicate sia eguale a zero.

Equilibrio di un punto materiale non libero.

Questo punto materiale sarà costretto a muoversi costantemente sopra certe superfici, o sopra certe curve fisse.

Questo punto non potendosi muovere liberamente nello spazio, diremo che è sottomesso ad un *collegamento* che potrà essere sostituito da una forza che chiameremo *forza di collegamento,* purchè essa produca lo stesso effetto del collegamento, obblighi

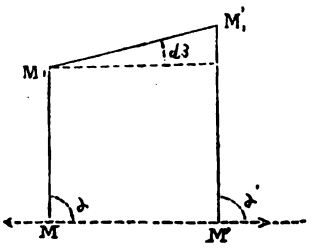
cioè il punto materiale a muoversi costantemente sulla curva o sulla superficie fissa. Se conoscessimo la forza di collegamento e l'applicassimo al punto materiale considerato, potremmo sopprimere il collegamento stesso, il punto materiale diventerebbe allora libero e diremmo che è *necessario e sufficiente perchè questo punto sia in equilibrio che la resultante di tutte le forze, la forza di collegamento compresa, sia eguale a zero.* La forza di collegamento è generalmente sconosciuta, però le equazioni che esprimono che la resultante di tutte le forze applicate al punto materiale è eguale a zero, sono tre e contengono tre incognite che sono precisamente le tre componenti della forza di collegamento. Possiamo ottenere lo stesso resultato e più direttamente osservando che se il punto è in equilibrio sopra una superficie o sopra una curva fissa data, la resultante di tutte le forze che gli sono applicate, la forza di collegamento non compresa, dovrà essere normale a questa superficie od a questa curva poichè se ciò non fosse, questa resultante potrebbe essere decomposta in due forze, l'una normale e l'altra tangente alla superficie o alla curva. La componente normale avrebbe per effetto di fare appoggiare il punto sulla superficie o sulla curva; la componente tangenziale di far percorrere su questa curva o su questa superficie un certo cammino al punto materiale considerato: dunque non vi sarebbe più equilibrio e perciò la resultante delle forze applicate ad un punto materiale non libero è normale alla superficie od alla curva sulla quale questo punto si muove. Ciò essendo, la reazione della curva sopra il punto è eguale e direttamente opposta alla resultante di tutte le forze che gli sono applicate e questa reazione è la forza di collegamento. In tutto ciò non si tien conto dell'attrito.

Alla stessa guisa di un punto materiale, un sistema materiale può essere libero o non libero; in quest'ultimo caso diremo che il sistema materiale considerato è sottomesso ad uno o più collegamenti.

Lavoro meccanico delle forze mutue.

Siano M e M' due punti sottomessi a due forze repulsive F e F'. Supponiamo che in un tempo infinitamente piccolo dt il punto M sia venuto in M_1 percorrendo un certo spazio ds ed il punto M' in

M'_1 percorrendo un certo spazio ds'. La direzione e la lunghezza della distanza l che separava i punti M ed M' saranno cambiate e la loro nuova distanza $l + dl$ farà un angolo infinitamente piccolo $d\beta$ con la retta MM'.



Le due forze F *ed* F' essendo mutue, abbiamo per definizione

$$F = F'.$$

Il lavoro elementare della forza F' è $F' ds' \cos\alpha'$, il lavoro elementare della forza F è $- F ds \cos\alpha$ ed il lavoro elementare $d\mathscr{L}$ delle due forze è:

$$d\mathscr{L} = F' ds' \cos\alpha' - F ds \cos\alpha,$$

$$d\mathscr{L} = F' (ds' \cos\alpha' - ds \cos\alpha).$$

Proiettiamo il contorno poligonale $MM_1M'_1M'$ sopra la direzione MM', si deve avere:

$$- ds \cos\alpha + (l + dl) \cos d\beta + ds' \cos\alpha' = l.$$

Trascurando gl'infinitamente piccoli d'ordine superiore al primo,

$$- ds \cos\alpha + l + dl + ds' \cos\alpha' = l,$$

da dove:

$$ds \cos\alpha - ds' \cos\alpha' = dl$$

e per conseguenza il lavoro elementare $d\mathscr{L}$ delle forze mutue ha per espressione

$$d\mathscr{L} = F dl.$$

Se le forze F invece di essere repulsive fossero attrattive, si avrebbe

$$d\mathscr{L} = -F\,dl$$

Del lavoro virtuale.

Sia un punto materiale M e senza preoccuparci del moto che può avere realmente diamogli uno spostamento elementare e fittivo che chiameremo *virtuale*. Se il punto M è sottomesso all'azione di una forza F, il lavoro che produrrebbe questa forza se facesse percorrere al suo punto d'applicazione lo spostamento virtuale δs si chiamerà *lavoro virtuale* della forza F. Per distinguere lo spostamento reale dallo spostamento virtuale, indicheremo quest'ultimo con la notazione δs: il lavoro virtuale della forza F è

$$l_v F = F\,\delta s\,\cos(F, \delta s).$$

Teorema.

Perchè un punto materiale libero sia in equilibrio è necessario e sufficiente che la somma dei lavori virtuali di tutte le forze applicate a questo punto materiale sia eguale a zero per uno spostamento virtuale qualunque.

Infatti se il punto M è in equilibrio, la resultante di tutte le forze che gli sono applicate è eguale a zero ed R essendo questa resultante il suo lavoro virtuale è

$$l_v R = R\,\delta s\,\cos(R, \delta s)$$

e poichè

$$R = 0,$$

ne risulta

$$l_v R = 0$$

qualunque sia δs.

Il lavoro della resultante essendo eguale alla somma dei lavori delle componenti, la somma dei lavori di tutte le forze applicate al punto M dovrà essere eguale a zero, qualunque sia δs. La

condizione è dunque necessaria perchè è sempre adempiuta quando il corpo è in equilibrio. Questa condizione è sufficiente, cioè se è adempiuta, il punto materiale è in equilibrio. Infatti se la somma dei lavori di tutte le forze è eguale a zero qualunque sia δs, il lavoro della resultante è pure eguale a zero qualunque sia δs, abbiamo dunque:

$$R\,\delta s\,cos\,(R,\,\delta s) = 0,$$

qualunque sia δs e $cos\,(R,\,\delta s)$ poichè l'angolo che fa R con δs dipende dalla direzione di δs; dunque perchè l'equazione sia soddisfatta bisogna avere

$$R = 0$$

e poichè la resultante R è eguale a zero, il punto materiale M è in equilibrio.

Teorema.

Perchè un sistema materiale libero sia in equilibrio, la condizione necessaria e sufficiente è, che la somma dei lavori virtuali di tutte le forze applicate in un punto qualunque del sistema sia eguale a zero per tutti gli spostamenti virtuali qualunque che possono darsi simultaneamente o individualmente a tutti i punti del sistema.

1° La condizione è necessaria.

Infatti se tutti i punti sono separatamente in equilibrio, possiamo ad ognun d'essi applicare il teorema precedente, abbiamo allora per ogni punto,

$$\Sigma\, l_v F = 0.$$

La somma di tutte queste somme sarà essa pure eguale a zero.

2° La condizione è sufficiente.

Infatti se la condizione è adempiuta abbiamo:

$$\Sigma\, l_v F + \Sigma\, l_v F' + \Sigma\, l_v F'' + \ldots\ldots = 0$$

qualunque sia lo spostamento virtuale scelto. Diamo al sistema uno spostamento virtuale tale che tutti i punti materiali che compongono il sistema, uno solo eccettuato, restino fissi. Per tutti i punti fissi le somme dei lavori virtuali saranno eguali a zero, appoggian-

dosi sulla prima parte del teorema, e non resterà nel primo membro dell'equazione altro che la somma dei lavori virtuali delle forze applicate al solo punto che si muove; avremo per questo punto

$$\Sigma l_v F = 0.$$

Lasciando egualmente e successivamente mobili i differenti punti del sistema dimostreremmo che tutti sono in equilibrio e perciò il sistema materiale considerato è esso pure in equilibrio.

Equilibrio di un sistema materiale non libero.

Quando un punto materiale od un sistema materiale non può muoversi liberamente nello spazio in una direzione qualunque, questo punto o sistema materiale è sottomesso a uno o più collegamenti. Per i sistemi materiali ammetteremo tre sorta di collegamenti.

1° *I differenti punti del sistema sono astretti a restare a delle distanze invariabili gli uni relativamente agli altri;*

2° *Alcuni punti del sistema sono astretti a muoversi sopra superfici o curve fisse;*

3° *Alcune porzioni del sistema che considereremo come solidi invariabili sono astrette a restare tangenti fra loro senza che vi sia attrito.*

Allorquando il sistema considerato sarà sottomesso ad un collegamento qualunque appartenente ad una delle tre categorie indicate, potremo sempre sostituirgli delle forze di collegamento convenientemente scelte. Per un collegamento della prima categoria per esempio, applicheremo ai differenti punti del sistema delle forze mutue che li manterranno a delle distanze invariabili gli uni dagli altri; queste forze saranno attrattive se i punti componenti il sistema tendono ad allontanarsi, repulsive se tendono ad avvicinarsi.

Per la seconda categoria le forze di collegamento saranno delle forze normali alle curve o alle superfici sulle quali si sposta il sistema materiale od uno dei suoi punti e queste forze cambieranno secondo che il mobile tende a penetrare le curve o le superfici, o ad allontanarsene.

Nella terza categoria avremo come forze di collegamento due

forze mutue applicate al punto di contatto dei corpi e dirette secondo la normale comune, forze che saranno attrattive se i corpi tendono a separarsi e repulsive se tendono a penetrarsi.

Lemma.

Se supponiamo un sistema sottomesso a dei collegamenti delle tre categorie or ora enunciate e se diamo ai punti del sistema degli spostamenti virtuali compatibili con il collegamento, i lavori virtuali delle forze di collegamento sono eguali a zero.

Supponiamo prima di tutto un collegamento della prima categoria. Abbiamo veduto che al collegamento possiamo sostituire due forze mutue che avvicinano od allontanano i punti del sistema secondo che tendono ad allontanarsi o ad avvicinarsi, in modo che le distanze che li separano restino invariabili. Il lavoro delle forze mutue è Fdl, l essendo la distanza primitiva di due punti del sistema, ma se lo spostamento virtuale è compatibile con il collegamento, la distanza l non cambia per due punti dati, perciò:

$$dl = 0,$$

da dove

$$Fdl = 0.$$

Il lavoro delle forze di collegamento è dunque eguale a zero per la prima categoria se lo spostamento virtuale è compatibile con il collegamento.

Supponiamo ora un collegamento della seconda categoria.

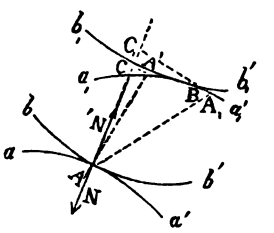
Alcuni punti sono astretti a restare sopra delle superfici o delle curve fisse: in questo caso la forza di collegamento è normale alla superficie o alla curva. Se lo spostamento virtuale scelto è compatibile con il collegamento, il mobile resterà sulla superficie

o sulla curva fissa e la forza di collegamento F_c sarà perciò perpendicolare a δs ed il lavoro virtuale di questa forza sarà eguale a zero, poichè:

$$\cos(F_c, \delta s) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Supponiamo infine un collegamento della terza categoria.

Siano aa' e bb' due porzioni del sistema astrette a restare tangenti fra loro senza attrito. Sostituiamo al collegamento due forze mutue N e N' applicate ai due punti di contatto dei due corpi e



dirette secondo la normale comune. Se diamo uno spostamento virtuale compatibile con il collegamento, i due corpi si muoveranno restando sempre tangenti fra loro e verranno in a_1a_1', b_1b_1'; il nuovo punto di contatto dei due corpi sarà B e gli antichi punti di contatto saranno venuti l'uno in A_1 e l'altro in A'; il lavoro della forza N' per questo spostamento è

$$N' \times AA' \cos(N', AA') = N' \times AC$$

se si proietta AA' sopra AN'; così pure il lavoro della forza N per questo stesso spostamento è

$$-N \times AA_1 \cos(N, AA_1) = -N \times AC_1$$

proiettando AA_1 sopra AC. I due punti A_1 e A' essendo infinitamente vicini al punto B, sono ambedue nel piano tangente comune alle due superfici in B; questo piano tangente fa un angolo infinitamente piccolo con il piano tangente comune alle due superficie in A, egli è pure perpendicolare alla direzione di N e perciò i punti C e C_1 si confondono; siccome abbiamo

$$F = F',$$

ne risulta

$$N' \times AC = -N \times AC_1.$$

Dunque la somma dei lavori virtuali delle forze di collegamento è eguale a zero.

In conclusione se lo spostamento virtuale è compatibile con il collegamento, i lavori delle forze di collegamento sono eguali a zero ed il lemma è dimostrato.

Teorema.

In un sistema materiale non libero, la condizione necessaria e sufficiente perchè vi sia equilibrio è che la somma dei lavori virtuali di tutte le forze esterne sia eguale a zero per tutti gli spostamenti virtuali compatibili con il collegamento.

Infatti se il sistema è in equilibrio la condizione è adempiuta, poichè se ai collegamenti si sostituiscono le forze di collegamento F_c avremo un sistema libero in equilibrio sotto l'azione delle forze F e F_c, la somma dei lavori virtuali di tutte queste forze sarà eguale a zero ed avremo:

$$l_v F + l_v F_c = 0$$

e

$$\Sigma l_v F + \Sigma l_v F_c = 0,$$

qualunque sia lo spostamento virtuale scelto: se questo spostamento virtuale è compatibile con il collegamento sappiamo che

$$\Sigma l_v F_c = 0$$

e l'equazione si riduce a

$$\Sigma l_v F = 0,$$

per uno spostamento virtuale compatibile con il collegamento. Se vi è equilibrio la condizione è dunque adempiuta.

La condizione è sufficiente, cioè se è adempiuta il sistema è in equilibrio. Supponiamo che ciò non sia; se il sistema non è in equilibrio, alcuni punti di questo sistema si muovono in un modo non compatibile con il collegamento; per ristabilire l'equilibrio applichiamo a questi punti delle forze Q dirette in senso inverso del moto ch'essi hanno, il sistema sarà allora in equilibrio ed applicando la prima parte del teorema dobbiamo avere:

$$l_v Q + l_v F = 0$$

per ogni spostamento compatibile con i collegamenti ed in particolar modo per lo spostamento ch'abbiamo supposto esistere per certi punti

del corpo e che abbiamo detto essere forzatamente compatibile con il collegamento; ma poichè abbiamo supposto che la condizione d'equilibrio è adempiuta, che si ha cioè:

$$\Sigma l_v F = 0,$$

la nostra equazione si riduce a

$$\Sigma l_v Q = 0.$$

Ogni forza Q è diretta in senso inverso dello spostamento del punto al quale è stata applicata, il lavoro di ogni forza Q è dunque negativo, tutti i termini della somma $\Sigma l_v Q$ essendo negativi, questa somma è negativa e non eguale a zero; è dunque una cosa assurda il supporre che alcuni punti non siano in equilibrio, dunque se la condizione è adempiuta il sistema è in equilibrio.

Equilibrio di un solido invariabile libero.

Il collegamento in questo caso è della prima categoria poichè i differenti punti del sistema debbono restare a delle distanze invariabili gli uni dagli altri. Per poter applicare il teorema precedente bisogna che lo spostamento virtuale scelto sia compatibile con il collegamento.

Diamo al solido invariabile uno spostamento virtuale δs, questo spostamento potrà (vedi Cinematica) essere sostituito da una traslazione eguale e parallela alla traslazione dell'uno dei punti del sistema e da una rotazione intorno ad un asse che passa da questo punto; abbiamo dimostrato che questa traslazione e questa rotazione potevano essere sostituite da tre traslazioni δx, δy, δz parallele a tre assi coordinati OX, OY, OZ e da tre rotazioni $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, intorno a questi assi.

Sia F una forza applicata al solido considerato e siano X, Y, Z le sue tre componenti parallele ai tre assi coordinati. Per calcolare il lavoro della forza F per lo spostamento δx, bisogna proiettare questa forza sull'asse OX e moltiplicare questa proiezione per δx, ma la proiezione della forza F sull'asse OX è X, il lavoro della forza F per questo primo spostamento è dunque $X\delta x$, così per gli spostamenti δy e δz, i lavori della forza F sono $Y\,\delta y$

e $Z\,\delta z$. Per calcolare il lavoro della forza F per lo spostamento δx, osserveremo che $\delta\alpha$ essendo una rotazione intorno all'asse delle x, dobbiamo calcolare il lavoro di una forza applicata ad un punto che gira intorno ad un asse; sappiamo allora che questo lavoro è eguale al momento della forza relativamente a quest'asse moltiplicato per la rotazione elementare del punto: dunque il lavoro elementare della forza F per lo spostamento $\delta\alpha$ è $\mathcal{M}_{ox} F\,\delta\alpha$, così pure i lavori della forza F per gli spostamenti $\delta\beta$ e $\delta\gamma$ sono $\mathcal{M}_{oy} F\,\delta\beta$ e $\mathcal{M}_{oz} F\,\delta\gamma$. Il lavoro della forza F per lo spostamento δs è dunque:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + \delta\alpha\,\mathcal{M}_{ox} F + \delta\beta\,\mathcal{M}_{oy} F + \delta\gamma\,\mathcal{M}_{oz} F,$$

per una forza F' avremmo

$$X'\delta x + Y'\delta y + Z'\delta z + \delta\alpha\,\mathcal{M}_{ox} F' + \delta\beta\,\mathcal{M}_{oy} F' + \delta\gamma\,\mathcal{M}_{oz} F',$$

e così via di seguito per tutte le forze applicate al sistema. Se il solido fosse in equilibrio bisognerebbe che la somma dei lavori virtuali di tutte queste forze fosse eguale a zero qualunque fosse δs; dovremmo avere cioè:

$$0 = \delta x\,\Sigma X + \delta y\,\Sigma Y + \delta z\,\Sigma Z + \delta\alpha\,\Sigma\,\mathcal{M}_{ox} F + \delta\beta\,\Sigma\,\mathcal{M}_{oy} F + \delta\gamma\,\Sigma\,\mathcal{M}_{oz} F.$$

Ciò dev'esser vero qualunque sia lo spostamento virtuale δs, cioè qualunque siano δx, δy, δz, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$; bisogna dunque che abbiamo simultaneamente:

$$\Sigma X = 0,$$

$$\Sigma Y = 0,$$

$$\Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma\,\mathcal{M}_{ox} F = 0,$$

$$\Sigma\,\mathcal{M}_{oy} F = 0,$$

$$\Sigma\,\mathcal{M}_{oz} F = 0.$$

La condizione necessaria e sufficiente perchè un solido invariabile libero sia in equilibrio è dunque che *le somme delle proiezioni delle forze sopra tre assi coordinati e le somme dei mo-*

menti di tutte queste forze, presi intorno ai medesimi assi, sieno eguali a zero.

Le sei equazioni che abbiamo trovate chiamansi *le condizioni d'equilibrio d'un solido invariabile libero.*

Le tre prime equazioni diconsi di proiezione, le tre altre dei momenti.

Quando dovremo applicare questo teorema sceglieremo l'origine degli assi coordinati e la loro direzione in modo da semplificare la questione più che si può. Supponiamo per esempio e prima di tutto che tutte le forze applicate al solido invariabile siano concorrenti; prenderemo per origine delle coordinate il punto di concorso di tutte queste forze, allora tutte le forze incontreranno gli assi coordinati; i loro momenti intorno a questi assi saranno eguali a zero e le tre equazioni dei momenti saranno sempre soddisfatte poichè si riducono tutte all'identità.

$$0 = 0.$$

Per sapere se il solido è in equilibrio, basterà verificare se le tre equazioni di proiezione sono soddisfatte.

Supponiamo in secondo luogo tutte le forze parallele fra loro; prenderemo allora l'uno degli assi coordinati, l'asse delle z per esempio, parallelo alle forze e gli assi coordinati essendo perpendicolari fra di loro, le forze saranno perpendicolari agli assi delle x e delle y. Le equazioni

$$\Sigma X = 0,$$

$$\Sigma Y = 0,$$

saranno soddisfatte immediatamente perchè si riducono ambedue a

$$0 = 0.$$

Le forze essendo parallele all'asse delle z, i loro momenti presi intorno a quest'asse sono eguali a zero e l'equazione

$$\Sigma \mathcal{M}_{oz} F = 0$$

si riduce a

$$0 = 0,$$

ed in questo caso per sapere se il corpo è in equilibrio, basterà verificare se

$$\Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{oz} F = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{oy} F = 0.$$

Supponiamo infine che tutte le forze applicate al solido siano situate in uno stesso piano; prenderemo questo piano per piano dei due assi OX e OY; l'asse OZ essendo perpendicolare al piano YOX, sarà perpendicolare a tutte le forze e l'equazione

$$\Sigma Z = 0,$$

si ridurrà: $$0 = 0.$$

Di più le forze essendo tutte situate nel piano degli assi OX, OY, incontreranno questi assi ed i momenti presi intorno ad OX e ad OY saranno eguali a zero, le equazioni

$$\Sigma \mathcal{M}_{ox} F = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{oy} F = 0,$$

si riducono a $$0 = 0.$$

Dunque perchè il corpo sia in equilibrio basta che si abbia

$$\Sigma X = 0,$$

$$\Sigma Y = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{oz} F = 0.$$

Equilibrio di un solido invariabile non libero.
Il solido ha un punto fisso.

Per poter trascurare il collegamento bisogna dare al solido uno spostamento virtuale compatibile con il collegamento. Il solido invariabile avendo un punto fisso, il solo moto che possa prendere è una rotazione intorno a questo punto fisso: ma sappiamo che una

rotazione elementare intorno ad un punto fisso può essere sostituita da una rotazione elementare intorno ad un asse istantaneo che passa da questo punto fisso e quest'ultima può essa pure essere sostituita da tre rotazioni intorno a tre assi coordinati passanti dal punto fisso. Dunque il solo spostamento virtuale che si possa dare al solido invariabile, compatibile con il collegamento, si compone di tre rotazioni intorno a tre assi coordinati.

Chiamando $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ le rotazioni elementari intorno ai tre assi OX, OY, OZ, i lavori della forza F per esempio per questi tre spostamenti sono $\delta\alpha\, \mathcal{M}_{ox} F$, $\delta\beta\, \mathcal{M}_{oy} F$, $\delta\gamma\, \mathcal{M}_{oz} F$. Il lavoro totale della forza F è

$$\delta\alpha\, \mathcal{M}_{ox} F + \delta\beta\, \mathcal{M}_{oy} F + \delta\gamma\, \mathcal{M}_{oz} F.$$

Il lavoro di un'altra forza F' è

$$\delta\alpha\, \mathcal{M}_{ox} F' + \delta\beta\, \mathcal{M}_{oy} F' + \delta\gamma\, \mathcal{M}_{oz} F'.$$

La somma dei lavori virtuali di tutte queste forze è dunque:

$$\delta\alpha\, \Sigma\, \mathcal{M}_{ox} F + \delta\beta\, \Sigma\, \mathcal{M}_{oy} F + \delta\gamma\, \Sigma\, \mathcal{M}_{oz} F.$$

Questa somma dev'essere eguale a zero qualunque sia lo spostamento virtuale scelto, cioè qualunque siano $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$. Bisogna dunque che si abbia separatamente e simultaneamente:

$$\Sigma\, \mathcal{M}_{ox} F = 0,$$

$$\Sigma\, \mathcal{M}_{oy} F = 0,$$

$$\Sigma\, \mathcal{M}_{oz} F = 0.$$

Se volessimo calcolare la reazione del punto fisso applicheremmo al solido invariabile questa reazione; potremmo allora sopprimere il collegamento ed il solido invariabile considerato diventerebbe libero. Siano X_1, Y_1, Z_1 le tre componenti di questa reazione del punto fisso; il solido essendo libero deve soddisfare alle sei equa-

zioni d'equilibrio d'un solido invariabile libero. Le equazioni di proiezione sono:

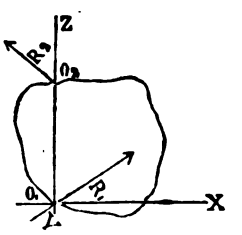
$$X_1 + \Sigma X = 0,$$
$$Y_1 + \Sigma Y = 0,$$
$$Z_1 + \Sigma Z = 0,$$

Le tre equazioni dei momenti non contengono la reazione del punto fisso perchè questo punto è stato preso come origine degli assi e non le scriveremo. Dalle tre equazioni di proiezione dedurremo X_1, Y_1, Z_1. Queste equazioni fanno vedere come *la reazione del punto fisso sia eguale alla resultante di tutte le forze esterne e direttamente opposta a questa resultante.* Infatti dalle tre equazioni di proiezione deduciamo:

$$X_1 = -\Sigma X,$$
$$Y_1 = -\Sigma Y,$$
$$Z_1 = -\Sigma Z.$$

Il solido a due punti fissi.

Il solido non potrà girare altro che intorno alla retta che congiunge questi due punti fissi. Tutti i punti del solido sono dunque astretti a muoversi sopra dei circoli aventi i loro piani perpendicolari a questa retta. Il solo spostamento virtuale compatibile con



il collegamento è una rotazione intorno alla retta che congiunge i due punti fissi; prendiamo questa retta per asse delle z e l'uno dei punti fissi per origine delle coordinate. Siano O_1 e O_2 questi punti fissi. Lo spostamento virtuale compatibile con il collegamento essendo la rotazione $\delta\gamma$ intorno all'asse $O_1 Z$, il lavoro di una forza F è

$\delta\gamma\ \mathcal{M}_{o_1 z} F$. La somma dei lavori virtuali di tutte le forze è $\delta\gamma\ \Sigma\ \mathcal{M}_{o_1 z} F$. Se vi è equilibrio questa somma deve essere eguale a zero qualunque sia $\delta\gamma$. La condizione d'equilibrio necessaria e sufficiente è dunque in questo caso:

$$\Sigma\ \mathcal{M}_{o_1 z}\ F = 0.$$

Per avere le reazioni dei punti O_1 e O_2 applichiamole al solido invariabile. Siano X_1, Y_1, Z_1 le componenti della reazione R_1 del punto O_1 e siano X_2, Y_2, Z_2 le componenti della reazione R_2 del punto O_2; applicando queste reazioni al solido esso diventa libero e per essere in equilibrio deve soddisfare alle sei equazioni d'equilibrio d'un solido invariabile libero, cioè dobbiamo avere:

$$\Sigma X + X_1 + X_2 = 0,$$

$$\Sigma Y + Y_1 + Y_2 = 0,$$

$$\Sigma Z + Z_1 + Z_2 = 0.$$

Per i momenti presi intorno agli assi coordinati la forza R_1 non dà nulla; quanto alla forza R_2, due delle sue componenti hanno dei momenti eguali a zero, la componente X_2 perchè è parallela all'asse delle x e la componente Z_2 perchè è diretta secondo l'asse delle Z ed incontra l'asse delle x; resta semplicemente il momento della componente Y_2, e se abbiamo

$$O_1 O_2 = h,$$

il momento di questa componente è $Y_2 h$, avremo dunque per i momenti relativamente all'asse delle x

$$Y_2 h + \Sigma\ \mathcal{M}_{o_1 x}\ F = 0.$$

Le componenti Y_2 e Z_2 non danno nulla e resta

$$X_2 h + \Sigma\ \mathcal{M}_{o_1 y}\ F = 0.$$

Relativamente all'asse delle z, le reazioni R_1 e R_2 non danno nulla e abbiamo

$$\Sigma\ \mathcal{M}_{o_1 z}\ F = 0.$$

Abbiamo dunque sei equazioni:

$$\Sigma X + X_1 + X_2 = 0,$$

$$\Sigma Y + Y_1 + Y_2 = 0,$$

$$\Sigma Z + Z_1 + Z_2 = 0,$$

$$Y_2 h + \Sigma \mathcal{M}_{0,x} F = 0,$$

$$X_2 h + \Sigma \mathcal{M}_{0,y} F = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{0,z} F = 0,$$

per determinare le sei componenti. X_1 Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 delle due reazioni R_1 e R_2.

Osserviamo che l'ultima equazione non contiene nessuna incognita, non potremo perciò completamente determinare le due reazioni; infatti la terza equazione di proiezione è la sola che contenga Z_1 e Z_2 e non potremo trovare altro che $Z_1 + Z_2$.

Il solido si muove appoggiandosi per mezzo di alcuni punti sopra un piano fisso.

Tutti i punti del sistema sono astretti a muoversi sopra dei piani paralleli al piano fisso. Prendiamo questo piano per il piano coordinato XY e l'asse delle Z perpendicolare a questo piano.

Il solo spostamento virtuale compatibile con il collegamento è una traslazione parallela al piano XY. Questa traslazione può essere decomposta in due traslazioni δx, δy e in una rotazione $\delta\gamma$ intorno all'asse OZ; il lavoro virtuale di una forza F è dunque:

$$X \delta x + Y \delta y + \delta\gamma \mathcal{M}_{oz} F.$$

Operando egualmente per tutti i punti del sistema e per tutte le forze che loro sono applicate, dobbiamo avere:

$$\delta x \Sigma X + \delta y \Sigma Y + \delta\gamma \Sigma \mathcal{M}_{oz} F = 0,$$

qualunque siano δx, δy, $\delta\gamma$.

Se si volessero cercare le reazioni dei punti di contatto si opererebbe come nel caso precedente. Queste reazioni sono normali al piano fisso, parallele cioè all'asse *OZ*.

Bisogna che il corpo abbia almeno tre punti di contatto col piano fisso perchè tutti i suoi punti si muovano parallelamente a questo piano.

Capitolo II.

Sistemi di forze equivalenti.

Sia un sistema di forze F ed un sistema di forze F' che indicheremo con le notazioni $S(F)$ e $S(F')$. Diremo che *questi due sistemi sono equivalenti se prendendo nello spazio tre assi coordinati e rettangolari, le somme delle proiezioni delle forze F e delle forze F' sopra questi tre assi sono eguali, e se le somme dei momenti delle forze F e delle forze F' presi intorno ai tre assi coordinati sono eguali.*

Perchè due sistemi di forze $S(F)$ e $S(F')$ siano equivalenti, è necessario avere

$$\Sigma X = \Sigma X',$$

$$\Sigma Y = \Sigma Y',$$

$$\Sigma Z = \Sigma Z',$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{ox} F = \Sigma \mathcal{M}_{ox} F',$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{oy} F = \Sigma \mathcal{M}_{oy} F',$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{oz} F = \Sigma \mathcal{M}_{oz} F',$$

Queste sei equazioni chiamansi *equazioni d'equivalenza.*

Risulta da questa definizione che se un corpo sottomesso all'azione di un sistema di forze $S(F)$ è in equilibrio, sarà pure in equilibrio se al sistema $S(F)$ sostituiamo il sistema $S(F')$.

Infatti se il corpo sollecitato dalle forze F è in equilibrio, queste forze F devono soddisfare alle sei condizioni d'equilibrio:

$$\Sigma X = 0,$$

$$\Sigma Y = 0,$$

$$\Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{ox} F = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{oy} F = 0,$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{oz} F = 0.$$

Ma il sistema $S(F)$ è equivalente al sistema $S(F')$, dunque:

$$\Sigma X = \Sigma X',$$
$$\Sigma Y = \Sigma Y',$$
$$\Sigma Z = \Sigma Z',$$
$$\Sigma \mathcal{M}_{ox} F = \Sigma \mathcal{M}_{ox} F,$$
$$\Sigma \mathcal{M}_{oy} F = \Sigma \mathcal{M}_{oy} F',$$
$$\Sigma \mathcal{M}_{oz} F = \Sigma \mathcal{M}_{oz} F',$$

per conseguenza:

$$\Sigma X' = 0,$$
$$\Sigma Y' = 0,$$
$$\Sigma Z' = 0,$$
$$\Sigma \mathcal{M}_{ox} F' = 0,$$
$$\Sigma \mathcal{M}_{oy} F' = 0,$$
$$\Sigma \mathcal{M}_{oz} F' = 0.$$

Le forze F' soddisfano alle sei condizioni d'equilibrio, perciò il corpo considerato sarà sempre in equilibrio se invece di applicargli le forze F gli si applicano le forze F'.

Dalla definizione di due sistemi di forze equivalenti risulta anche che se due sistemi di forze $S(F)$ e $S(F')$ sono applicati simultaneamente ad un solido invariabile e lo tengono in equilibrio, il sistema $S(F)$ è equivalente al sistema $S(-F')$.

Infatti, se il solido è in equilibrio sotto l'azione simultanea delle forze F ed F', abbiamo

$$\Sigma X + \Sigma X' = 0,$$
$$\Sigma Y + \Sigma Y' = 0,$$
$$\Sigma Z + \Sigma Z' = 0,$$
$$\Sigma \mathcal{M}_{ox} F + \Sigma \mathcal{M}_{ox} F' = 0,$$
$$\Sigma \mathcal{M}_{oy} F + \Sigma \mathcal{M}_{oy} F' = 0,$$
$$\Sigma \mathcal{M}_{oz} F + \Sigma \mathcal{M}_{oz} F' = 0,$$

da dove:

$$\Sigma X = -\Sigma X',$$
$$\Sigma Y = -\Sigma Y',$$
$$\Sigma Z = -\Sigma Z',$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{ox} F = -\Sigma \mathcal{M}_{ox} F',$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{oy} F = -\Sigma \mathcal{M}_{oy} F',$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{oz} F = -\Sigma \mathcal{M}_{oz} F',$$

oppure

$$\Sigma X = \Sigma (-X),$$
$$\Sigma Y = \Sigma (-Y),$$
$$\Sigma Z = \Sigma (-Z),$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{ox} F = \Sigma \mathcal{M}_{ox} (-F'),$$

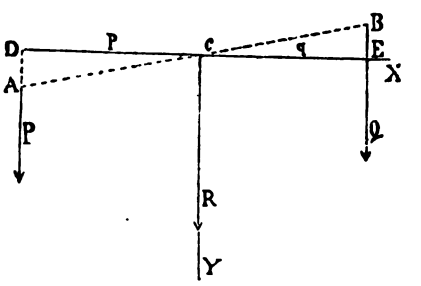
$$\Sigma \mathcal{M}_{oy} F = \Sigma \mathcal{M}_{oy} (-F'),$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{oz} F = \Sigma \mathcal{M}_{oz} (-F'),$$

che sono le equazioni d'equivalenza dei sistemi: $S(F)$ e $S(-F')$.

Forze parallele e di medesimo senso.

Supponiamo due forze P e Q parallele e di medesimo senso



applicate l'una nel punto A e l'altra nel punto B. *Queste due forze sono equivalenti ad una forza R tale che*

$$R = P + Q.$$

di medesimo senso delle forze P e Q *ed applicata in un punto* C, *tale che*

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}.$$

Infatti, prendiamo tre assi coordinati CX, CY, CZ, l'origine essendo al punto C, l'asse CY confondendosi con la forza R, l'asse CX essendo perpendicolare in C alla forza R e l'asse delle z perpendicolare nel punto C al piano della figura. Le proiezioni sull'asse delle x sono tutte eguali a zero, la prima equazione d'equivalenza si riduce a

$$0 = 0.$$

Le proiezioni sull'asse CY danno

$$P + Q = R;$$

quest'equazione è vera, poichè abbiamo costruito R eguale a $P + Q$. Le proiezioni sull'asse delle z sono tutte eguali a zero ed abbiamo perciò:

$$0 = 0.$$

Dunque le tre prime equazioni d'equivalenza sono soddisfatte. Per le tre altre le prime due si riducono a

$$0 = 0$$

perchè tutte le forze sono parallele all'asse CY ed incontrano tutte l'asse CX; perciò i momenti di tutte le forze presi intorno a questi due assi non esistono. La somma dei momenti delle forze P e Q presi intorno all'asse delle z è $Qq - Pp$ e se vi è equivalenza questa somma dev'essere eguale al momento della forza R preso intorno all'asse CZ, cioè a zero, poichè la forza R incontra l'asse CZ. Nei triangoli simili ACD e BCE abbiamo:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{CE}$$

cioè,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{p}{q}.$$

Ma per ipotesi

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P},$$

dunque

$$\frac{Q}{P} = \frac{p}{q},$$

$$Qq - Pp = 0.$$

L'ultima equazione d'equivalenza è pure soddisfatta.

Qualche volta chiamasi *resultante* la forza R e le forze P e Q componenti. Reciprocamente ***una forza R applicata in un punto C potrà esser sostituita da delle forze parallele e di medesimo senso in modo che***

$$P + Q = R$$

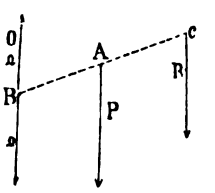
ed i punti d'applicazione A e B di queste due forze P e Q saranno posti in modo tale che si abbia

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}.$$

Supponiamo in secondo luogo che le due forze date siano parallele ma di senso contrario. Siano P e Q queste due forze e supponiamo

$$P > Q.$$

Potremo, applicando il teorema precedente, decomporre la forza P in due forze parallele e di medesimo senso; siano R e Q' queste due



forze; facciamo in modo che la forza Q' sia applicata nello stesso punto B della forza Q, e che si abbia:

$$Q' = Q.$$

Ciò fatto, dobbiamo avere

$$P = R + Q'$$

e

$$\frac{AC}{AB} = \frac{Q'}{R}.$$

Ma
$$Q' = Q,$$
$$R = P - Q.$$

Dunque
$$\frac{AC}{AB} = \frac{Q}{P - Q},$$

da dove
$$AC = AB \frac{Q}{P - Q} = AB \frac{Q}{R}.$$

L'insieme delle forze date P e Q si trova dunque sostituito dall'insieme delle tre forze R, Q e Q'; le forze Q e Q' essendo eguali e direttamente opposte si distruggono e resta la forza R, che è perciò equivalente alle forze date P e Q. Diremo anche qui che R è la resultante delle forze P e Q. Se, come caso particolare, supponiamo:
$$P = Q,$$

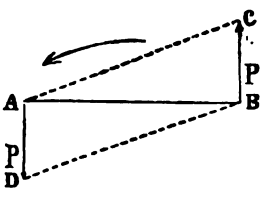
ci resta
$$R = 0,$$
$$AC = \infty$$

In questo caso le due forze non hanno resultante, dicesi allora che formano *una coppia. Una coppia è l'insieme di due forze eguali, parallele e di senso contrario.*

Se si avessero più di due forze parallele, si comporrebbero successivamente due a due ed arriveremmo così ad avere una resultante unica eguale alla somma algebrica delle forze, od una coppia.

Coppie.

Sapendo che ogni forza può essere applicata in un punto qualunque della sua direzione, prenderemo per punti d'applicazione della



coppia le estremità della perpendicolare comune alla direzione delle due forze che compongono la coppia.

La coppia formata dalle forze P indicasi con la notazione (P,P).

La lunghezza AB chiamasi il *braccio di leva* della coppia.

Il momento di una coppia è il prodotto Pp di una delle forze P per il suo braccio di leva p.

Il senso di una coppia è quello secondo il quale le due forze farebbero girare i loro punti d'applicazione intorno al punto di mezzo di AB.

Osserviamo che il momento di una coppia è eguale alla superficie del parallelogrammo $ABCD$.

Proiezione di una coppia sopra un piano.

Sia una coppia (P,P) e supponiamo un piano che fa con quello della coppia un angolo α. Se supponiamo che si proiettino le forze della coppia (P,P) sopra questo piano, la proiezione sarà una coppia (P',P') il di cui momento sarà $P'p'$ ed avremo:

$$P'p' = P\,p\,\cos\alpha.$$

Infatti le forze P essendo parallele, eguali e di senso contrario le loro proiezioni P' saranno pure parallele, eguali e di senso contrario; esse formeranno dunque una coppia. Il momento della coppia (P,P) è la superficie del parallelogrammo fatto sulle due forze P ed è eguale a Pp, il momento della coppia (P',P') è la superficie del parallelogrammo fatto sulle forze P', quest'ultimo parallelogrammo è la proiezione del parallelogrammo fatto sulle forze P, la sua superficie $P'p'$ è dunque eguale alla superficie Pp moltiplicata per il coseno dell'angolo α che fanno fra di loro i piani delle due coppie (P,P) e (P',P') dunque:

$$P'p' = P\,p\,\cos\alpha.$$

Proiezione di una coppia sopra un asse.

Le proiezioni di due forze costituenti una coppia, sopra un asse qualunque, sono eguali e di senso contrario, la loro somma algebrica è dunque eguale a zero. Da ciò risulta che *una forza unica*

non può mai far equilibrio ad una coppia perchè le somme delle proiezioni della forza e della coppia sopra i tre assi coordinati non potranno mai essere eguali a zero.

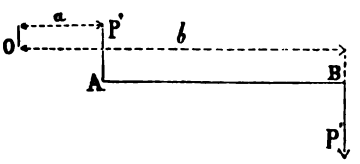
Momento d'una coppia relativamente ad un asse.

Chiamasi *momento d'una coppia relativamente ad un asse la somma algebrica dei momenti delle due forze della coppia, presi intorno a quest'asse.*

Teorema.

Il momento d'una coppia relativamente a un asse è eguale al momento della coppia (P', P') *ottenuto proiettando la coppia* (P, P) *sopra un piano perpendicolare all'asse.*

Infatti supponiamo l'asse perpendicolare al piano della figura. Per prendere i momenti delle due forze della coppia intorno a quest'asse basta proiettare queste due forze sopra un piano perpendicolare all'asse e prendere i momenti delle proiezioni relativamente al punto d'intersezione del piano e dell'asse. Proiettando una coppia (P, P) sopra un piano otteniamo una nuova coppia (P', P'), sia O il punto d'intersezione del piano e dell'asse e siano a e b le distanze dal punto O alle forze P' e $-P'$. Il momento della forza P' ap-



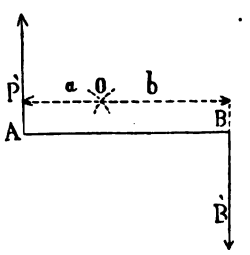
plicata al punto A è $-P'a$, e il momento della forza P' applicata nel punto B è $+Pb$. Dunque il momento della coppia (P', P') relativamente all'asse O, è $P'b - P'a$, ma

$$b = a + p',$$

allora:

$$P'b - P'a = P'(a + p') - P'a = P'p'.$$

Supponiamo in secondo luogo che il punto O d'intersezione del piano e dell'asse che gli è perpendicolare sia fra le forze P' e $-P'$; siano sempre a e b le distanze da questo punto O ai punti A e B;



i momenti delle due forze saranno di medesimo segno poichè il momento della forza P' applicata in A è:

$$-P'(-a) = P'a,$$

il momento della forza P' applicata in B è $P'b$, ed il momento della coppia (P', P') è

$$P'b + P'a = P'p'$$

perchè

$$a + b = p'.$$

Se α è l'angolo che fa il piano della coppia (P, P) con l'asse OO', avremo

$$Moo'(P, P) = P'p' = Pp\cos\alpha;$$

perchè questo momento sia eguale a zero è necessario che

$$\cos\alpha = 0,$$

cioè che l'asse sia parallelo al piano della coppia; se l'asse fosse perpendicolare a questo piano,

$$\alpha = 0$$

ed il momento della coppia relativamente all'asse sarebbe eguale a Pp.

Da tutto ciò risulta che *se ad un corpo è applicata soltanto una coppia, o delle forze che si riducono ad una coppia, questo corpo non è in equilibrio* perchè i momenti della coppia presi intorno a tre assi coordinati non sono mai eguali a zero; e poichè abbiamo veduto or ora che una forza non poteva mai fare equilibrio ad una coppia, ne risulta che *saranno necessarie almeno due forze per fare equilibrio ad una coppia.*

Equivalenza delle coppie.

Siano due coppie (P, P), (Q, Q); perchè queste due coppie siano equivalenti è prima di tutto necessario che le loro proiezioni sopra tre assi coordinati siano eguali. Questa condizione è sempre adempiuta poichè sappiamo che la proiezione di una coppia sopra un asse qualunque è sempre eguale a zero; le tre prime equazioni di equivalenza si riducono perciò a

$$0 = 0.$$

È di più necessario che i momenti delle coppie relativamente ai tre assi coordinati siano eguali fra loro. Sappiamo che il momento d'una coppia relativamente ad un asse è eguale al momento di detta coppia, ottenuto proiettandola sopra un piano perpendicolare all'asse. Sia A l'angolo che fa il piano della coppia (P, P) con un piano perpendicolare all'asse delle x, il momento della coppia (P, P) relativamente all'asse delle x sarà $Pp \cos A$; troveremo egualmente che i momenti di questa coppia (P, P) relativamente agli assi delle y e delle z è $Pp \cos B$ e $Pp \cos C$, chiamando B e C gli angoli che fanno i piani perpendicolari agli assi delle y e delle z con il piano della coppia (P, P). Chiamiamo A', B', C' gli angoli che fa il piano della coppia (Q, Q) con dei piani perpendicolari ai tre assi coordinati; i momenti di questa coppia (Q, Q) relativamente ai tre assi sono $Qq \cos A'$, $Qq \cos B'$, $Qq \cos C'$. Perchè vi sia equivalenza fra le due coppie (P, P), (Q, Q) è necessario avere

$$Pp \cos A = Qq \cos A',$$
$$Pp \cos B = Qq \cos B',$$
$$Pp \cos C = Qq \cos C'.$$

Innalziamo i due membri di queste tre equazioni al quadrato ed addizioniamole membro a membro.

$$P^2 p^2 (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = Q^2 q^2 (\cos^2 A' + \cos^2 B' + \cos^2 C').$$

Ma
$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$
$$\cos^2 A' + \cos^2 B' + \cos^2 C' = 1,$$

resta dunque
$$P^2 p^2 = Q^2 q^2,$$

da dove
$$Pp = \pm Qq.$$

Se prendiamo

$$Pp = Qq,$$

le equazioni di equivalenza diventano:

$$\cos A = \cos A',$$
$$\cos B = \cos B',$$
$$\cos C = \cos C',$$

gli angoli A, B, C sono eguali agli angoli A', B', C', le due coppie sono in due piani paralleli.

Se prendiamo:

$$Pp = -Qq,$$

le tre equazioni d'equivalenza diventano:

$$\cos A = -\cos A',$$
$$\cos B = -\cos B',$$
$$\cos C = -\cos C',$$

gli angoli A', B', C' sono i supplementi degli angoli A, B, C. Si dimostra che questa seconda ipotesi è inammissibile, che i piani delle due coppie debbono essere paralleli e che per conseguenza le equazioni di equivalenza ci danno

$$Pp = Qq.$$

Riassumendo, perchè due coppie siano equivalenti è necessario avere

$$Pp = Qq;$$

di più queste due coppie devono essere in piani paralleli. Dunque *se un corpo è sottomesso all'azione di una coppia, potremo, senza cambiare lo stato d'equilibrio o di non equilibrio del corpo, far muovere come vorremo la coppia nel suo piano od in un piano qualunque che gli sia parallelo, potremo cambiare la grandezza e la direzione delle forze che la compongono purchè si cambi nello stesso tempo la grandezza del braccio di leva affinchè il momento della coppia resti costante ed il suo senso non cambi.*

Risulta da ciò un modo semplice di rappresentare le coppie. In un punto qualunque del piano della coppia conduciamo una perpendicolare a questo piano e portiamo sopra questa perpendicolare una lunghezza proporzionale al prodotto Pp, quanto al senso nel

quale dobbiamo portare questa lunghezza, esso è tale che se si suppone l'osservatore posto secondo l'asse, i piedi nel piano, l'estremità dell'asse coincidendo con il mezzo del braccio di leva della coppia, vede la rotazione effettuarsi nel senso delle lancette d'un orologio, cioè da sinistra a destra. Quest'asse chiamasi *asse rappresentativo della coppia.*

Composizione delle coppie.

Supponiamo in primo luogo delle coppie che hanno i loro piani paralleli. Potremo, se si tratta di due coppie, trasportare l'una di esse nel piano dell'altra, cambiare le grandezze delle forze che le compongono senza cambiare i loro momenti in modo che i bracci di leva di queste due coppie siano eguali, e possiamo infine far coincidere i bracci di leva. Siano due coppie che abbiamo rese eguali, (P, P), (Q, Q); se queste coppie sono di medesimo senso, alle due estremità del braccio di leva saranno applicate le forze $P + Q$; avremo cioè una coppia che avrà un braccio di leva eguale al braccio di leva delle due coppie date e sarà costituita dalle forze $P + Q$. Sia p il braccio di leva comune; il momento della coppia resultante è

$$(P + Q)\, p = P\, p + Q\, p.$$

Questo momento è dunque eguale alla somma dei momenti delle coppie date e l'asse rappresentativo resultante sarà eguale alla somma degli assi rappresentativi componenti.

Se le due coppie date invece di essere di medesimo senso fossero di senso contrario, ad ogni estremità del braccio di leva comune avremmo la differenza $P - Q$ come forze componenti la coppia resultante; il momento di questa coppia sarebbe

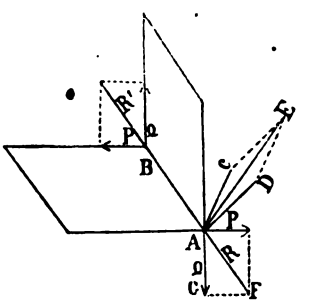
$$(P - Q)\, p = P\, p - Q\, p,$$

eguale cioè alla differenza dei momenti delle coppie date, come pure l'asse rappresentativo della coppia $(P - Q,\ P - Q)$ è eguale alla differenza degli assi rappresentativi delle coppie date.

Se conveniamo di dare il segno + od il segno — ad una coppia secondo il senso nel quale si effettua la rotazione, diremo in modo generale che *se abbiamo un numero qualunque di coppie*

in un medesimo piano od in piani paralleli, queste coppie possono essere sostituite da una coppia unica posta in un piano parallelo ai piani delle coppie date. Il momento della coppia resultante è eguale alla somma algebrica dei momenti delle coppie componenti; l'asse rappresentativo della coppia resultante è eguale alla somma algebrica degli assi rappresentativi delle coppie componenti.

Supponiamo due coppie in piani non paralleli. Potremo spostare ognuna delle coppie nel suo piano in modo da trasportare i bracci di leva sopra l'intersezione dei due piani; cambiando allora le forze delle coppie senza cambiare i loro momenti, possiamo far sì che queste due coppie abbiano un medesimo braccio di leva AB. Siano



P le forze di una delle coppie e Q quelle dell'altra. Le due forze P e Q applicate nel punto A ci danno una resultante R e le due forze applicate nel punto B ci danno una resultante R'. Dico che queste due forze R e R' sono eguali, parallele e di senso contrario.

Infatti i piani dei due parallelogrammi sono paralleli poichè passano da due rette P e Q parallele fra loro due a due; questi parallelogrammi avendo tutti i loro lati paralleli, le loro diagonali sono parallele e eguali perchè i parallelogrammi sono eguali. Le forze R e R' sono dunque eguali, parallele e di senso contrario, esse costituiscono perciò una coppia.

Nel punto A costruiamo gli assi rappresentativi delle coppie (P, P) e (Q, Q); perciò conduciamo AC perpendicolare al piano della coppia (P, P) e proporzionale al momento di questa coppia, AD proporzionale al momento della coppia (Q, Q) e perpendicolare al piano di questa coppia; abbiamo

$$AC = P \times AB,$$
$$AD = Q \times AB.$$

Sopra le rette AC e AD costruiamo un parallelogrammo e conduciamo la diagonale AE. Il piano del parallelogrammo $ACDE$ è perpendicolare nello stesso tempo ai piani delle due coppie (P,P), (Q, Q) perchè passa dalle rette AC e AD perpendicolari rispettivamente ad ognuno di questi piani.

Il piano del parallelogrammo la cui diagonale è R, passando dalle due rette P e Q che sono perpendicolari ad AB, è perpendicolare alla retta AB; perciò questo parallelogrammo ed il parallelogrammo $ACDE$ sono nello stesso piano. Nei triangoli ACE e AFG gli angoli C e G sono eguali come aventi i loro lati rispettivamente perpendicolari; di più i lati AC e CE sono eguali ai lati $AG \times AB$ e $FG \times AB$, questi due triangoli sono dunque simili ed abbiamo:

$$AE = AF \times AB = R \times AB.$$

I triangoli essendo simili e avendo due dei loro lati rispettivamente perpendicolari fra loro, abbiamo AE perpendicolare ad AF; ma AE è perpendicolare pure ad AB poichè AB è perpendicolare al piano del parallelogrammo $ADEC$; AE è dunque perpendicolare al piano della coppia (R, R) e come questa linea è eguale a $R \times AB$, cioè al momento della coppia (R, R) e la sua direzione è quella dell'asse rappresentativo di questa coppia, vediamo che la retta AE è precisamente l'asse rappresentativo della coppia (R, R).

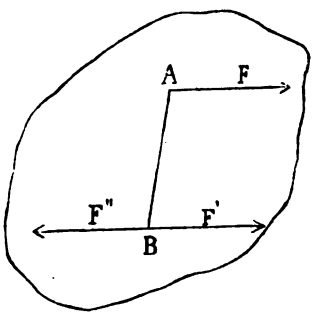
Dunque, *due coppie situate in piani non paralleli possono essere sostituite da una coppia unica che ha per asse rappresentativo la resultante geometrica degli assi rappresentativi delle due coppie date.*

Conseguenze delle proprietà delle coppie.

Se una forza F è applicata in un punto A di un corpo solido, possiamo trasportare questa forza parallelamente a se stessa per applicarla in un punto B di questo solido purchè a questa nuova forza si aggiunga una coppia.

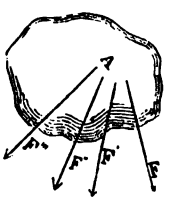
Infatti nel punto B possiamo applicare due forze F' e F'' eguali a F e di senso direttamente opposto fra loro. Il sistema di forze F, F', F'' è equivalente alla forza F, ma questo sistema di tre forze

può essere considerato come composto d'una coppia costituita dalle forze F e F'' e da una forza F' che non è altro che la forza F trasportata parallelamente a se stessa in B. Risulta da ciò che *se*



si considera un numero qualunque di forze, esse possono essere sostituite da un sistema equivalente composto d'una coppia e d'una forza.

Infatti siano F, F', F''.... le forze applicate ad un corpo; potremo trasportare la forza F parallelamente a se stessa, purchè vi si aggiunga una coppia, e così per tutte le altre forze F', F'', F'''.... avremo così tutte le forze trasportate parallelamente a loro stesse



nel punto A ed altrettante coppie quante sono le forze considerate. Tutte le forze applicate nel punto A ci daranno una resultante unica e tutte le coppie si comporranno successivamente in una sola; avremo infine una coppia ed una forza e come il punto A è qualunque, è stato scelto cioè arbitrariamente, così potremo giungere al risultato ottenuto in una infinità di modi.

Quando abbiamo ottenuto come resultato definitivo della composizione delle forze applicate ad un corpo una coppia ed una forza, possiamo comporre la forza unica con una delle due forze della

coppia; allora invece del sistema di forze date avremo un sistema di due forze che in generale non saranno nello stesso piano e che per conseguenza non potranno comporsi. Se avvenisse per caso che la forza unica fosse situata nel piano della coppia unica, componendo questa forza con una delle forze della coppia avremmo una resultante situata nel piano della coppia e potremmo comporre questa resultante con l'altra forza della coppia per avere infine una forza unica.

Dunque, in modo generale ed in un'infinità di maniere, *le forze applicate ad un corpo solido possono essere sostituite da una forza e da una coppia non situate nello stesso piano, questa forza e questa coppia potendo essere sostituite da due forze non situate nello stesso piano. Eccezionalmente, le forze applicate ad un corpo solido potranno essere sostituite da una forza e da una coppia situate nello stesso piano ed allora la forza e la coppia potranno essere sostituite da una forza unica.*

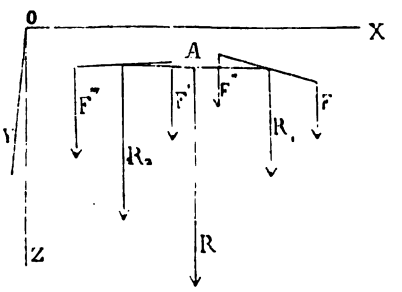
Come una forza non può far equilibrio ad una coppia, se il corpo è in equilibrio, risulta da tutto ciò che precede che la forza e la coppia resultanti sono separatamente eguali a zero.

Capitolo III.

Equilibrio dei corpi pesanti

Centri delle forze parallele.

Se supponiamo un certo numero di forze parallele e di medesimo senso F, F', F''.... applicate in punti qualunque d'un solido, sappiamo che alle forze F e F'' possiamo sostituire una forza R_1 di cui conosciamo l'intensità ed il punto d'applicazione; possiamo egualmente sostituire alle forze F' e F''' una forza R_2 e comporre



infine le forze R_1 e R_2 in una forza unica R applicata al punto A e la cui intensità è eguale alla somma delle intensità di tutte le forze date. Avremmo potuto operare altrimenti e comporre la forza F con la forza F', la loro resultante con la forza F'', la resultante di queste due forze con F''' e così via di seguito, per arrivare infine alla forza unica R eguale alla somma di tutte le forze date e applicata in un punto A del corpo. Questo punto A è evidentemente lo stesso, qualunque sia l'ordine nel quale si compongono successivamente le differenti forze date. È pure evidente che se si cambia la direzione comune di tutte le forze senza cambiare i loro punti d'applicazione, la direzione della forza R cambierà essa pure, ma non già il suo punto d'applicazione.

Il punto A chiamasi *centro delle forze parallele;* per determinare la posizione di questo punto esprimiamo che la forza R e l'insieme di tutte le forze date soddisfano alle sei condizioni d'equivalenza.

Sia F una forza qualunque, sieno x, y, z le coordinate del suo punto d'applicazione e x_1, y_1, z_1, le coordinate del punto A; supponendo gli assi coordinati rettangolari e l'asse delle z parallelo alla direzione delle forze, le proiezioni di tutte le forze sull'asse delle x e sull'asse delle z sono eguali a zero e le due prime equazioni di equivalenza sono sempre soddisfatte perchè si riducono a

$$0 = 0,$$

tutte le forze essendo parallele all'asse delle z.

$$R = \Sigma F.$$

Le tre altre equazioni d'equivalenza esprimono che le somme dei momenti delle forze componenti i sistemi, presi relativamente ai tre assi coordinati sono eguali fra loro. Prendendo i momenti intorno all'asse delle x:

$$Ry_1 = \Sigma Fy,$$

e prendendo i momenti intorno all'asse delle y

$$Rx_1 = \Sigma Fx.$$

L'asse delle z essendo parallelo alle direzioni delle forze, i momenti presi intorno a quest'asse sono tutti eguali a zero. Il punto A non cambia cambiando la direzione delle forze, facciamo in modo che queste forze vengano parallele all'asse delle x per esempio, prendendo i loro momenti intorno a quest'asse, viene

$$Rz_1 = \Sigma Fz.$$

Da queste tre ultime equazioni deduciamo:

$$x_1 = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F},$$

$$y_1 = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F},$$

$$z_1 = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma F}.$$

Tali sono i valori delle coordinate del centro delle forze parallele.

Centri di gravità.

Se consideriamo un corpo infinitamente piccolo sulla superficie della terra, le forze della gravità che sono applicate ai differenti punti di detto corpo possono essere considerate come parallele fra loro; vi sarà dunque nel corpo un centro di forze parallele; esso chiamasi in questo caso *centro di gravità*. Se p è il peso di un punto materiale del corpo, P il peso totale di detto corpo, le coordinate del centro di gravità sono

$$x_1 = \frac{\Sigma px}{P},$$

$$y_1 = \frac{\Sigma py}{P},$$

$$z_1 = \frac{\Sigma pz}{P}.$$

Senza cambiare queste coordinate, possiamo cambiare tutte le forze nel medesimo rapporto dividendole tutte per g; il quoziente del peso di un corpo per l'accelerazione g è la massa di questo corpo, chiamando allora m la massa di un punto materiale e M la massa del corpo considerato, avremo:

$$x_1 = \frac{\Sigma mx}{M},$$

$$y_1 = \frac{\Sigma my}{M},$$

$$z_1 = \frac{\Sigma mz}{M}.$$

Il quoziente del peso di un corpo per la sua densità ci dà il suo volume; dividendo dunque per la densità come abbiamo diviso per l'accelerazione, e chiamando V il volume del corpo, v il volume di uno dei suoi punti, abbiamo:

$$x_1 = \frac{\Sigma vx}{V},$$

$$y_1 = \frac{\Sigma vy}{V},$$

$$z_1 = \frac{\Sigma vz}{V}.$$

Se si tratta di una superficie, supporremo che il peso d'ogni elemento è proporzionale alla superficie di quest'elemento ed avremo:

$$x_1 = \frac{\Sigma sx}{S},$$

$$y_1 = \frac{\Sigma sy}{S},$$

$$z_1 = \frac{\Sigma sz}{S}.$$

Se avessimo infine da cercare il centro di gravità d'una lunghezza, supporremmo il peso d'ogni elemento proporzionale alla sua lunghezza, quindi le coordinate del centro di gravità sarebbero:

$$x_1 = \frac{\Sigma lx}{L},$$

$$y_1 = \frac{\Sigma ly}{L},$$

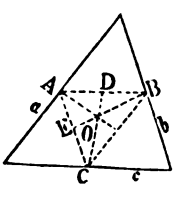
$$z_1 = \frac{\Sigma lz}{L}.$$

Ciò premesso, possiamo concludere che *il centro di gravità d'una linea retta è nel mezzo della sua lunghezza.*

Il centro di gravità d'una linea spezzata si otterrà prendendo i centri di gravità dei differenti lati applicandovi dei pesi proporzionali alla lunghezza di questi lati, e cercando il punto d'applicazione della resultante di tutti questi pesi.

Centro di gravità del contorno d'un triangolo.

Sia un triangolo i cui lati hanno per lunghezze rispettive *a, b, c* e prendiamo sopra questi lati i punti *A, B, C* che corrispondono ai



loro mezzi: applichiamo in *A, B, C* dei pesi rispettivamente proporzionali a *a, b* e *c*. In tutto il ragionamento che faremo, invece di

dire: componiamo i pesi applicati in *A, B, C,* diremo: **componiamo** *a, b, c.*

Ciò posto, componiamo prima di tutto *a* e *b,* il punto d'applicazione sarà sopra la retta *AB* ed in un punto *D* tale, che

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}.$$

Se nel triangolo *ABC* conduciamo la bisettrice dell'angolo *C,* questa bisettrice incontrerà la retta *AB* in un punto *D* e sappiamo che si ha

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}.$$

Ma

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}.$$

Dunque

$$\frac{AC}{CB} = \frac{b}{a},$$

il punto *D* è il punto d'applicazione della resultante dei due pesi proporzionali ai lati *a* e *b.* Per trovare il centro di gravità del perimetro del triangolo ci resterebbe da comporre la forza $a + b$ applicata in *D* con la forza *c* applicata in *C;* il punto d'applicazione della resultante sarà sopra la retta *CD.* Se invece di comporre in primo luogo le forze *a* e *b* avessimo composto le forze *a* e *c* per comporre in seguito la loro resultante $a + c$ con la forza *b,* avremmo trovato che il punto d'applicazione della resultante finale, cioè il centro di gravità, era sulla bisettrice *BE* dell'angolo *B* nel triangolo *A B C;* questo centro di gravità trovasi pure per le medesime ragioni sulla bisettrice dell'angolo *A* nel medesimo triangolo. Il centro di gravità cercato essendo simultaneamente sulle tre bisettrici degli angoli del triangolo, si troverà al loro punto d'incontro *O.* Dunque *il centro di gravità del perimetro d'un triangolo coincide con il centro di una circonferenza inscritta in un triangolo ottenuto congiungendo i punti che corrispondono alle metà d'ogni lato del triangolo considerato.*

Centro di gravità d'una curva.

Un punto nello spazio è determinato da tre coordinate, cioè sono necessarie tre condizioni perchè la posizione del punto nello spazio sia conosciuta. Se però questo punto è sopra una curva, due coordinate basteranno per determinarlo, il fatto di essere sopra una curva data contando per una condizione; in questo caso adunque le coordinate del centro di gravità sono:

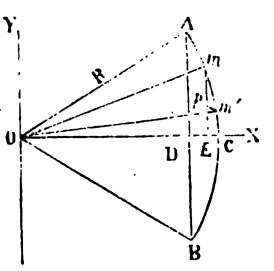
$$x_1 = \frac{\Sigma lx}{L}$$

$$y_1 = = \frac{\Sigma ly}{L}.$$

È necessario esprimere la differenziale dell'arco di curva, moltiplicarla per x o y, secondo che vogliamo il valore di x o di y, e quindi dividere il risultato trovato per la lunghezza dell'arco di curva considerato.

Centro di gravità d'un arco di circolo.

Sia AB l'arco di circolo, R il suo raggio, c la sua corda e a la lunghezza d'arco. Prendiamo l'asse delle x perpendicolare alla



corda; la curva essendo simetrica relativamente a quest'asse il suo centro di gravità sarà qui sopra; basta perciò calcolare x_1, abbiamo

$$x_1 = \frac{\Sigma lx}{L}.$$

l essendo la differenziale di L.

Consideriamo un elemento mm' dell'arco di circolo, conduciamo dal punto m l'ordinata mE e $m'p$ parallela all'asse ***delle*** x. I triangoli $mm'p$ e OmE sono simili ed abbiamo:

$$\frac{mm'}{Om} = \frac{m'p}{mE}$$

cioè

$$\frac{l}{R} = \frac{dx}{y},$$

da dove:

$$l = R\frac{dx}{y},$$

per conseguenza:

$$x_1 = \frac{\Sigma \frac{R\,x\,dx}{y}}{L}.$$

Ma

$$L = a,$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Dunque

$$x_1 = \frac{1}{a}\int \frac{Rx\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

e poichè per uno stesso valore di x si ottengono due archi eguali e simetrici relativamente all'asse delle x, abbiamo:

$$x_1 = \frac{2}{a}\int_{OD}^{OC} \frac{Rx\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

oppure,

$$x_1 = \frac{2R}{a}\int_{OD}^{OC} \frac{x\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Effettuando l'integrazione:

$$x_1 = \frac{2R}{a}\left(-\sqrt{R^2 - x^2}\right)_{OD}^{OC} = \frac{2R}{a}\left(\sqrt{R^2 - OD^2} - \sqrt{R^2 - OC^2}\right).$$

Ma

$$OC = R$$

e nel triangolo ADO,

$$AD = \sqrt{R^2 - OD^2} = \frac{c}{2}.$$

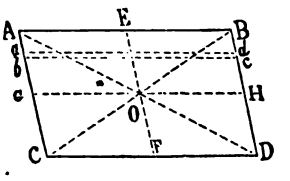
Dunque

$$x_1 = \frac{2R}{a} \cdot \frac{c}{2},$$

$$x_1 = \frac{Rc}{a}.$$

Centro di gravità della superficie d'un parallelogrammo.

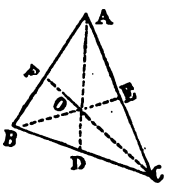
Sia $ABCD$ un parallelogrammo; decomponiamolo in parti infinitamente piccole per mezzo di rette parallele a AB. Ognuna di queste parti, come per esempio *abcd*, essendo di uno spessore infinitamente piccolo, la resultante dei pesi di tutti i suoi punti sarà



applicata nel mezzo della sua lunghezza e tutti i punti d'applicazione delle resultanti di tutti i pesi delle parti infinitamente piccole nelle quali è stato decomposto il parallelogrammo saranno sulla retta EF, il punto E essendo il mezzo della retta AB ed il punto F il mezzo della CD: per conseguenza il centro di gravità del trapezio dato è su questa retta EF. Si può dimostrare egualmente che il centro di gravità del trapezio è sulla retta GH, il punto G essendo il mezzo di AC e il punto H il mezzo di BD; dunque questo centro di gravità è nel punto O d'incontro delle rette EF e GH ed è nello stesso tempo il punto d'incontro delle diagonali AD e BC.

Centro di gravità della superficie d'un triangolo.

Sia un triangolo *ABC*, decomponiamolo in parti infinitamente piccole parallele alla base *BC;* potremo considerare queste parti come tanti parallelogrammi purchè si trascurino due triangoli infinitamente piccoli del second' ordine, due dei lati di questi parallelogrammi saranno paralleli alla mediana *AD* dell' angolo *A* nel triangolo *ABC*. I centri di gravità di tutti questi parallelogrammi



infinitamente piccoli saranno situati sopra la mediana *AD*. I pesi di tutti i parallelogrammi di che si compone il triangolo *ABC* essendo tutti applicati nei differenti punti di *AD*, la loro resultante sarà applicata sopra questa retta, dunque il centro di gravità del triangolo si trova sopra la mediana dell'angolo *A*. Troveremo egualmente che il centro di gravità del triangolo *ABC* si trova sulla mediana *BE* dell'angolo *B* e sulla mediana *CF* dell'angolo *C; il centro di gravità del triangolo coincide dunque con il punto di concorso delle tre mediane* cioè con il punto *O*.

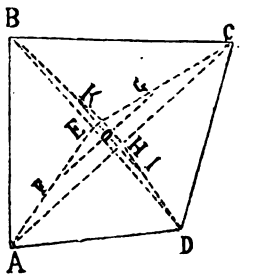
Centro di gravità della superficie d'un quadrilatero.

Sia il quadrilatero *ABCD;* conduciamo la diagonale *BD* e congiungiamo il suo punto di mezzo *E* con i punti *A* e *C*. Il centro di gravità del triangolo *ADB* è nel punto *F* tale che

$$AF = \frac{2}{3} AE.$$

Il centro di gravità del triangolo BDC è nel punto G tale che

$$CG = \frac{2}{3} CE.$$



Congiungiamo FG, AC ed il punto H mezzo di AC, con i punti B e D. Il centro di gravità del triangolo ADC è nel punto I ed abbiamo

$$DI = \frac{2}{3} DH.$$

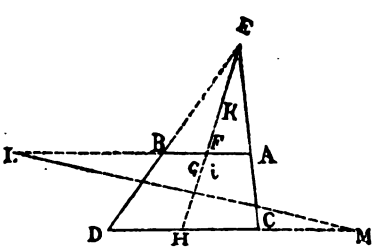
Il centro di gravità del triangolo ABC è in K ed abbiamo

$$BK = \frac{2}{3} BH.$$

Infine il centro di gravità del quadrilatero $ABCD$ è nel punto O d'incontro delle rette FG e KI.

Centro di gravità della superficie d'un trapezio.

Sia $ABCD$ il trapezio dato. Se decomponiamo questo trapezio in parti infinitamente piccole parallele alle basi, avremo una infi-



nità di trapezi infinitamente piccoli ed il centro di gravità di ogni trapezio sarà nel punto di mezzo della sua lunghezza; tutti i pesi

di tutti i trapezi elementari saranno dunque applicati sulla retta FH che congiunge i punti di mezzo delle due basi parallele ed il centro di gravità G del trapezio dato sarà perciò su questa retta FH. Per determinarlo osserviamo che il trapezio $ABCD$ è la differenza dei due triangoli CED e AEB. Il peso del triangolo CED è applicato nel punto i tale che

$$HI = \frac{1}{3} HE$$

ed è la resultante del peso del trapezio $ABCD$ applicato in G e del peso del triangolo ABE applicato in K, il punto K essendo determinato dalla relazione

$$EK = \frac{1}{3} EF.$$

I pesi essendo proporzionali alle superfici, chiamando B e A la base e l'altezza del triangolo CED, b e a la base e l'altezza del triangolo AEB, il peso del primo triangolo è $\frac{BA}{2}$, il peso del secondo $\frac{ba}{2}$ ed il peso del trapezio: $\frac{(B+b)(A-a)}{2}$. Poichè il peso del triangolo maggiore è la resultante dei due altri pesi, il suo momento preso relativamente ad un asse qualunque, sarà eguale alla somma dei momenti dei pesi del triangolo più piccolo e del trapezio, presi intorno a questo medesim'asse. Prendiamo i momenti intorno all'asse CD, x essendo la distanza del punto G a quest'asse. Poichè il momento del peso del gran triangolo è eguale alla somma dei momenti del peso del trapezio e del peso del piccolo triangolo, è pur vero che il momento del peso del trapezio è eguale alla differenza dei momenti dei pesi dei due triangoli: si ha,

$$\frac{(B+b)(A-a)}{2} x = \frac{BA}{2}\frac{A}{3} - \frac{ba}{2}\left(\frac{a}{3} + A - a\right).$$

Prendiamo anche i momenti dei tre pesi relativamente all'asse AB chiamando y la distanza del punto G a quest'asse; avremo

$$\frac{(B+b)(A-a)}{2} y = \frac{BA}{2}\left(A - \frac{A}{3} - a\right) + \frac{ba}{2}\frac{a}{3}.$$

Dividendo membro a membro queste due equazioni, si ha:

$$\frac{x}{y} = \frac{BA^2 - 3\,baA + 2\,ba^2}{ba^2 - 3\,BaA + 2\,BA^2}.$$

Ma

$$\frac{b}{B} = \frac{a}{A},$$

da dove

$$a = \frac{bA}{B}.$$

Quindi sostituendo nell'equazione ad a il suo valore:

$$\frac{x}{y} = \frac{BA^2 - 3\,bA\,\frac{bA}{B} + 2\,b\,\frac{b^2A^2}{B^2}}{b\,\frac{b^2A^2}{B^2} - 3\,BA\,\frac{bA}{B} + 2\,BA^2}.$$

Effettuando i calcoli:

$$\frac{x}{y} = \frac{B^3 - 3\,Bb^2 + 2\,b^3}{b^3 - 3\,bB^2 + 2\,B^3}.$$

Ma

$$B^3 - 3\,Bb^2 + 2\,b^3 = (B + 2\,b)\ (B - b)^2,$$
$$b^3 - 3bB^2 + 2B^3 = (2\,B + b)\ (B - b)^2.$$

Dunque,

$$\frac{x}{y} = \frac{B + 2\,b}{b + 2B}$$

oppure,

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{B}{2} + b}{\frac{b}{2} + B.}$$

Prolungheremo dunque AB d'una quantità BL eguale alla base B, CD d'una quantità CM eguale a b e congiungendo i punti M e L la retta ML incontra la mediana FH nel punto G centro di gravità cercato. Infatti nei due triangoli *HMG, FGL* abbiamo:

$$\frac{x}{y} = \frac{MH}{FL} = \frac{\frac{B}{2} + b}{\frac{b}{2} + B}$$

Centro di gravità della superficie d'una curva.

Per trovare il centro di gravità della superficie d'una curva la decomporremo in elementi infinitamente piccoli paralleli ai due assi; le coordinate del centro di gravità saranno:

$$x_1 = \frac{\int\int dx\, dy\, x}{\int\int dx\, dy},$$

$$y_1 = \frac{\int\int dx\, dy\, y}{\int\int dx\, dy}.$$

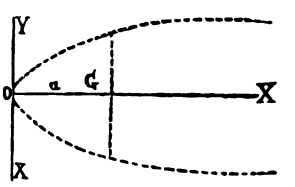
Queste integrali essendo prese fra i limiti convenienti.

Centro di gravità d'un segmento parabolico.

Cercheremo il centro di gravità di un segmento parabolico compreso fra il vertice della curva ed una corda perpendicolare al suo asse. L'equazione della curva è

$$y^2 = 2px.$$

Il centro di gravità è sull'asse delle x la curva essendo simetrica relativamente a quest'asse, basterà dunque calcolare x_1, abbiamo



$$x_1 = \frac{\int\int dx\, dy\, x}{\int\int dx\, dy}$$

Faremo variare y da $-\sqrt{2px}$ fino a $+\sqrt{2px}$ e x da 0 fino ad a, perciò:

$$x_1 = \frac{\int_0^a \int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dx\, dy\, x}{\int_0^a \int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dx\, dy}.$$

Ma

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dx\, dy\, x = \int_0^a x\, dx \left(y\right)_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} = 2\int_0^a x\, dx \sqrt{2px}$$

e

$$2\int_0^a x\, dx\, \sqrt{2px} = 2\sqrt{2p}\int_0^a x^{\frac{3}{2}}\, dx = 2\sqrt{2p}\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)_0^a$$

Infine

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dx\, dy\, x = \frac{4}{5}\sqrt{2pa^5}$$

Calcolando ora il denominatore, abbiamo:

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dx\, dy = \int_0^a dx \left(y\right)_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} = 2\int_0^a dx\, \sqrt{2px},$$

$$2\int_0^a dx\, \sqrt{2px} = 2\sqrt{2p}\int_0^a dx\, x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2p}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)_0^a$$

e

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}} dx\, dy = \frac{4}{3}\sqrt{2pa^3}.$$

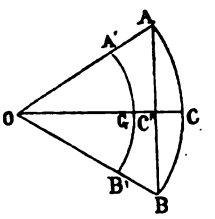
Dunque

$$x_1 = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{2pa^5}}{\frac{4}{3}\sqrt{2pa^3}} = \frac{3}{5}a.$$

Resulta da ciò che *qualunque sia la parabola data, purchè limitata dalla medesima corda e che il suo vertice sia nello stesso punto, il centro di gravità G sarà lo stesso.*

Centro di gravità di un settore circolare.

Supponiamo un settore OAB, sia r il suo raggio, c la sua corda e ACB l'arco. La figura essendo simetrica relativamente a OC perpendicolare alla corda AB, il centro di gravità sarà situato



sopra OC; per trovare questo centro di gravità decomponiamo il settore OAB in settori infinitamente piccoli; ognuno di essi potrà essere assimilato ad un triangolo e tutti i pesi di questi triangoli saranno applicati sulla mediana e ad $\frac{1}{3}$ della sua lunghezza partendo dalla base, cioè ai $\frac{2}{3}$ del raggio partendo dal centro e come ciò sarà vero per tutti i settori, tutti i loro pesi saranno applicati sopra l'arco di circolo $A'C'B'$ descritto dal punto O come centro con un raggio eguale a $\frac{2}{3}\ r$. La resultante dei pesi di tutti i settori infinitamente piccoli sarà applicata al centro di gravità cercato, ma questo centro di gravità G non è altro che il centro di gravità dell'arco di circolo $A'B'C'$ e chiamando a' la lunghezza di quest'arco, r' il suo raggio e c' la sua corda, abbiamo

$$OG = \frac{r'c'}{a'},$$

$$r' = \frac{2}{3}\ r,\ c' = \frac{2}{3}\ c,\ a' = \frac{2}{3}\ a.$$

Dunque:

$$OG = \frac{2}{3}\ \frac{rc}{a}.$$

Centro di gravità d'un volume.

Se dovessimo cercare il centro di gravità d'un volume bisognerebbe determinare la posizione di questo volume relativamente a tre assi coordinati rettangolari; quindi, le coordinate del centro di gravità sono:

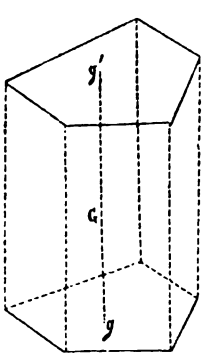
$$x_1 = \frac{\iiint dx\ dy\ dz\ x}{\iiint dx\ dy\ dz},$$

$$y_1 = \frac{\iiint dx\ dy\ dz\ y}{\iiint dx\ dy\ dz},$$

$$z_1 = \frac{\iiint dx\ dy\ dz\ z}{\iiint dx\ dy\ dz}.$$

Centro di gravità d'un prisma qualunque.

Decomponiamo il prisma dato in parti infinitamente piccole per mezzo di piani paralleli alle sue basi, avremo un'infinità di prismi

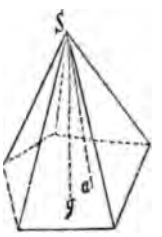


aventi un'altezza infinitamente piccola e perciò il loro centro di gravità coinciderà con i centri di gravità delle loro basi. I centri

di gravità di tutti questi prismi infinitamente piccoli saranno dunque sulla retta gg' che congiunge i centri di gravità g e g' delle due basi del prisma. Se i prismi infinitamente piccoli nei quali abbiamo decomposto il prisma dato sono eguali, i loro pesi saranno pure eguali ed il punto d'applicazione della loro resultante, cioè il centro di gravità G del prisma dato, sarà nel punto di mezzo della retta gg'. Lo stesso resultato è applicabile al cilindro ed al parallelepipedo; in quest'ultimo caso il punto G è anche il punto d'incontro delle diagonali.

Centro di gravità d'una piramide.

Supponiamo una piramide qualunque e decomponiamola in parti infinitamente piccole per mezzo di piani paralleli al piano della base; ognuna di queste parti avendo uno spessore infinitamente piccolo potrà confondersi con un prisma, il peso di questo prisma sarà applicato nel suo centro di gravità che potrà essere confuso con quello d'una delle sue basi; la resultante dei pesi di tutte queste parti o prismi sarà dunque applicata in un certo punto della linea



Sg, g essendo il centro di gravità della base della piramide. Per determinare in qual punto della retta Sg trovasi il centro di gravità della piramide, chiamiamo A la sua altezza Sa, B la superficie della sua base e b la superficie di una sezione della piramide fatta per mezzo di un piano parallelo alla base; sia z la distanza dalla base della piramide alla sezione di base b che si considera. Lo z del centro di gravità è

$$Z_1 = \frac{\Sigma v Z}{V}$$

v essendo il volume di un prisma infinitamente piccolo e V quello della piramide.

Abbiamo:

$$v = b\,dz.$$

Ma

$$\frac{b}{B} = \frac{Z^2}{A^2},$$

da dove

$$b = B\,\frac{Z^2}{A^2}$$

e perciò

$$v = B\,\frac{Z^2}{A^2}\,dz,$$

$$Z_1 = \frac{1}{V}\int_0^A \frac{B}{A^2}\,Z^3\,dz = \frac{\frac{B}{A^2}\,\frac{A^4}{4}}{V}.$$

Ma

$$V = \frac{BA}{3}.$$

Dunque

$$Z_1 = \frac{\frac{BA^2}{4}}{\frac{BA}{3}} = \frac{3}{4}\,A.$$

Il centro di gravità d'una piramide è sopra la retta che congiunge il centro di gravità della sua base con il suo vertice ed è situato ai $\frac{3}{4}$ di questa retta partendo dal vertice, a $\frac{1}{4}$ partendo dalla base.

Equilibrio d'un corpo sottomesso alla sola azione della gravità.

Cerchiamo prima di tutto qual è il lavoro elementare dovuto all'azione della gravità sopra un sistema materiale qualunque.

Siano x, y, z le coordinate d'un punto qualunque del sistema materiale e p il suo peso, siano x_1, y_1, z_1 le coordinate del centro di gravità del corpo e P il suo peso. Supponiamo che in un tempo

infinitamente piccolo tutto il sistema abbia subìto uno spostamento infinitamente piccolo; le coordinate di un punto qualunque del corpo sono doventate $x + dx$, $y + dy$ e $z + dz$, quelle del centro di gravità $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$. Lo z del centro di gravità essendo dato dalla relazione:

$$Z_1 = \frac{\Sigma p z}{P},$$

dopo lo spostamento avremo:

$$Z_1 + dz_1 = \frac{\Sigma p\,(Z + dz)}{P}$$

e come avanti lo spostamento:

$$PZ_1 = \Sigma pz;$$

dopo:

$$P\,(Z_1 + dz_1) = \Sigma p\,(z + dz).$$

Sottraendo l'una dall'altra queste due ultime equazioni:

$$P\,dz_1 = \Sigma\, p\,dz$$

$p\,dz$ è il lavoro elementare del peso p di un punto qualunque del corpo. Troviamo dunque che la somma dei lavori elementari dei pesi di tutti i punti del corpo è eguale al lavoro elementare del peso totale di questo corpo, questo peso essendo applicato al centro di gravità.

Se dobbiamo ora cercare le condizioni d'equilibrio d'un corpo qualunque sottomesso alla sola azione della gravità, bisognerà dare a questo corpo uno spostamento virtuale compatibile con il collegamento. Il lavoro virtuale del peso p di uno dei punti del corpo è $p\delta z$ e la somma dei lavori virtuali dei pesi di tutti i punti del corpo:

$$\Sigma\, p\,\delta z = P\,\delta z_1.$$

Perchè vi sia equilibrio è necessario, che $P\delta z_1$ sia eguale a zero, ma P non può essere mai eguale a zero, dunque bisogna avere

$$\delta z_1 = 0.$$

Perchè un corpo sottomesso alla sola azione della gravità sia in equilibrio è necessario che il suo centro di gravità resti fisso o che almeno resti nello stesso piano orizzontale. Se in seguito al collegamento, il centro di gravità del corpo non può muo-

versi altro che sopra una superficie o sopra una curva fissa, non vi potrà essere equilibrio che allorquando il centro di gravità si trova in un punto tale che la tangente in questo punto alla superficie od alla curva fissa sia orizzontale; se questo punto è il punto più alto, l'equilibrio è instabile poichè per poco che il centro di gravità s'allontani da questo punto se ne allontanerà sempre più. Se invece è il punto più basso, l'equilibrio è stabile. Infine se il centro di gravità è fisso o non può spostarsi altro che in un piano orizzontale, l'equilibrio è indifferente.

Capitolo IV.

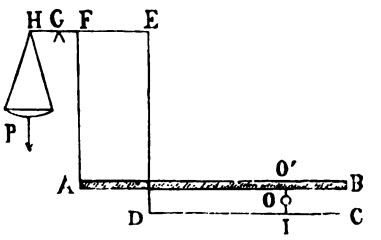
Equilibrio degl'istrumenti destinati a pesare i corpi.

Tutti gl'istrumenti destinati a pesare i corpi sono sottomessi ad una condizione essenziale e si è che *qualunque sia lo spostamento virtuale scelto, lo spostamento che ne risulta per la parte dell' istrumento destinata a sostenere i corpi, dev'essere una traslazione.*

Infatti il lavoro virtuale del peso del corpo dev'essere lo stesso qualunque sia la posizione che ha questo corpo, ciò esige che lo spostamento di tutti i punti della parte dell' istrumento destinata a sostenere i corpi sia eguale per tutti, che abbia cioè un moto di traslazione.

Bilancia a basculla.

Questa bilancia si compone di un piatto *AB* sopportato ad una delle sue estremità da una leva sulla quale il piatto si articola per



mezzo d'un asse *O;* l'estremità *C* di questa leva gira intorno ad un punto fisso *C,* l'altra estremità *D* si articola con un'asta verticale *DE* articolata a sua volta all'estremità *E* con una leva *EH* che gira sopra un perno fisso *G* e sorregge l'estremità del piatto *A* per mezzo di un'asta verticale articolata nei punti *F* e *A.*

Cerchiamo le condizioni in cui dev'essere la bilancia perchè il piatto possa prendere un moto di traslazione quando si dà alla leva CD una rotazione virtuale qualunque intorno al punto C. Lo spostamento del punto O potrà essere confuso con lo spostamento del punto I della leva CD e scriveremo che lo spostamento del punto O' e per conseguenza quello della retta OO' perpendicolare al piano del piatto è eguale allo spostamento del punto A; dunque eguale allo spostamento della retta AF perpendicolare a questo piatto. Le rette OO' e AF essendo perpendicolari al piatto, lo spostamento è una traslazione. Se $\delta\alpha$ è la rotazione virtuale intorno al punto C, lo spostamento del punto O' e per conseguenza quello del punto I è $\delta\alpha \times CI$. Lo spostamento del punto D è lo stesso di quello del punto E perchè DE è perpendicolare al piatto; questo spostamento è $\delta\alpha \times CD$. Nel suo moto intorno al punto G, il punto E è animato da una rotazione $\delta\beta$ ed il suo spostamento è $\delta\beta \times GE$. Dobbiamo avere:

$$\delta\alpha \times CD = \delta\beta \times GE,$$

da dove

$$\delta\beta = \frac{\delta\alpha \times CD}{GE}.$$

Il punto F è sottomesso egli pure alla rotazione $\delta\beta$ ed il suo spostamento è:

$$\delta\beta \times GF = \delta\alpha \frac{CD}{GE} \times GF.$$

Avremo dunque come spostamenti, del punto O': $\delta\alpha \times CI$ e del punto A: $\delta\alpha \times \frac{CD}{GE} \times GF$.

Perchè lo spostamento del piatto sia una traslazione, è necessario che gli spostamenti dei punti O' e A siano eguali; dunque è necessario avere

$$\delta\alpha \times CI = \delta\alpha \times \frac{CD}{GE} \times GF.$$

Da quest'equazione si deduce la condizione di costruzione seguente:

$$\frac{CI}{CD} = \frac{GF}{GE}.$$

Se la bilancia è costruita in simili condizioni, troveremo sempre il medesimo peso per un corpo posto sul suo piatto qualunque sia

il posto ch'egli occupa. Se il peso P del corpo da pesare è applicato nel punto A, potremo supporre ch'esso è applicato nel punto F. La somma dei momenti delle forze P e p presi intorno all'asse di rotazione G deve essere eguale a zero; dobbiamo avere cioè

$$P \times FG - p \times HG = 0,$$

da dove

$$P = p \frac{HG}{FG}.$$

Non possiamo fare HG molto più grande di FG e però non può esistere in questo sistema una gran differenza fra P e p; tutt'al più possiamo fare

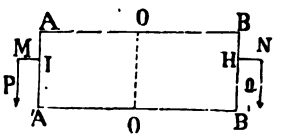
$$\frac{p}{P} = \frac{1}{10}$$

ciò che conduce a

$$HG = 10\ FG.$$

Bilancia di Roberval.

Sia un parallelogrammo $ARA'B'$ articolato ai suoi quattro vertici. Supponiamo il suo piano verticale, i lati AA' e BB' verticali ed i lati AB e $A'B'$ mobili intorno ai due punti O ed O' situati sopra



una stessa verticale e per conseguenza sopra una parallela a $A'A'$ ed a BB'. Sia M un punto qualunque collegato col lato AA' ed N un altro punto qualunque collegato col lato BB'. Se il parallelogrammo si muove, il lato AA' è sempre eguale e parallelo al lato OO', tutti i suoi punti s'innalzano o si abbassano della stessa quantità; il punto M s'innalza o si abbassa della stessa quantità dell'estremità I della retta MI, per conseguenza gli spazi descritti nel senso verticale dai punti A e M sono eguali. Così i punti B e N s'innalzano o s'abbassano di quantità eguali. Ciò posto, supponiamo che nei punti M e N vi siano applicate due forze verticali P e Q che si fanno equilibrio; la somma dei lavori virtuali di queste due forze dovrà essere

eguale a zero perchè i lavori delle reazioni che gli assi esercitano nei punti O ed O' sono eguali a zero e la somma totale dei lavori delle forze applicate al parallelogrammo dev'essere eguale a zero perchè vi sia equilibrio. Se dunque a e b sono gli spazi elementari percorsi nel senso verticale dai punti M e N, o ciò che è lo stesso, dai punti A e B, dobbiamo avere:

$$P\,a = Q\,b,$$

da dove

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}.$$

Ma per uno spostamento infinitamente piccolo, i punti A e B descrivono degli archi infinitamente piccoli, simili; proporzionali cioè ai loro raggi OA e OB: questi archi infinitamente piccoli perpendicolari ad AB fanno degli angoli eguali con la verticale; le loro proiezioni sopra la verticale sono dunque proporzionali agli archi stessi e per conseguenza proporzionali ai raggi; abbiamo dunque

$$\frac{b}{a} = \frac{OB}{OA},$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{OB}{OA}.$$

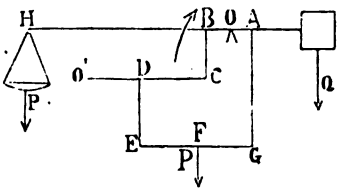
Ciò vuol dire che le forze P e Q sono nello stesso rapporto come se fossero direttamente applicate alle estremità A e B della leva AB supposta mobile intorno al punto O indipendentemente dai tre altri lati del parallelogrammo. La conclusione del ragionamento fatto è sempre la stessa qualunque siano i punti M e N purchè siano invariabilmente collegati, l'uno con il lato AA', l'altro con il lato BB'.

Quando si applica questa teoria alla costruzione d'una bilancia, si semplificano i rapporti facendo coincidere i punti O ed O' con i punti di mezzo delle rette AB e $A'B'$; perchè vi sia equilibrio è necessario in questo caso che le forze P e Q siano eguali. I piatti destinati a ricevere i corpi da pesare ed i pesi che loro fanno equilibrio sono disposti sui prolungamenti dei lati $A'A'$ e BB'.

Leva differenziale o di Catelnot.

Quest'istrumento si compone di una leva OH articolata nel punto O, d'un altra leva $O'C$ articolata nel punto O' e d'un'asta

orizzontale EG alla quale si applica in un punto F il corpo che si vuol pesare; i punti E e G, per mezzo di aste verticali ED e GA sono collegati con le leve $O'C$ e OH. Infine l'estremità C della leva $O'C$ è collegata per mezzo di un'asta verticale CB con la leva OH



ed i punti A e B sono sempre l'uno a destra e l'altro a sinistra del punto O. Un contrappeso Q fa equilibrio al peso delle aste e delle leve e i pesi p che indicano qual è il peso del corpo sono applicati nel punto H della leva OH.

Cerchiamo quali sono le condizioni d'equilibrio fra le forze P e p; la forza Q facendo equilibrio al peso dell' istrumento non entrerà nelle equazioni d'equilibrio. Poichè vi deve essere equilibrio fra le forze P e p, la somma dei lavori virtuali di queste due forze sarà eguale a zero per qualunque spostamento virtuale compatibile con il collegamento; per causa di questo collegamento, la leva OH non può prendere altro ch'una rotazione intorno al punto O; il solo spostamento virtuale compatibile con il collegamento è dunque una rotazione $\delta\alpha$ intorno all'asse O; lo spostamento che ne resulta per il punto H è $OH \times \delta\alpha$; se supponiamo che questa rotazione si effettui nel senso della freccia, il punto H s'innalzerà della quantità $OH \times \delta\alpha$ ed il punto B della quantità $OB \times \delta\alpha$, il punto C s'innalzerà della stessa quantità del punto B e ne risulterà una rotazione $\delta\beta$ intorno all'asse O'. In seguito alla rotazione $\delta\beta$ il punto C s'innalza della quantità $\delta\beta \times O'C$; è dunque necessario che si abbia

$$\delta\alpha \times OB = \delta\beta \times O'C.$$

Il punto D girando intorno all'asse O' s'innalza della quantità $\delta\beta \times O'D$; questo spostamento è eguale a quello del punto E. Il punto A girando intorno al punto O s'abbassa d'una quantità $\delta\alpha \times OA$ e questo spostamento è eguale a quello del punto G. Conosciamo

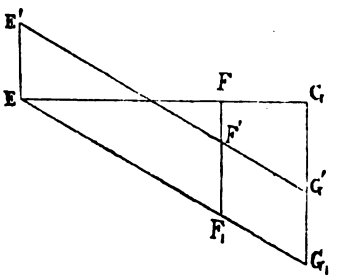
adunque lo spostamento dei due punti E e G e lo spostamento del punto D, $\delta\beta \times O'D$, potremo scriverlo sostituendo a $\delta\beta$ il suo valore

$$\delta\alpha \times \frac{OB}{O'C}$$

dedotto dall'equazione

$$\delta\alpha \times OB = \delta\beta \times O'C.$$

Conoscendo lo spostamento dei due punti E e G, cerchiamo lo spostamento del punto F. Sappiamo che il punto G s'abbassa d'una certa quantità GG' e che il punto E s'innalza d'un'altra quantità



EE'; il punto F s'abbasserà d'una certa quantità FF' che possiamo calcolare: perciò conduciamo dal punto E una parallela EF_1G_1 a $E'G'$, avremo

$$EE' = FF_1 - FF';$$

perchè il punto F si abbassi bisogna che la differenza $FF_1 - FF'$ sia positiva; se fosse negativa ne resulterebbe che più il corpo da pesare è peso e meno pesi p sono necessari per fargli equilibrio; se questa differenza fosse eguale a zero la bilancia starebbe in equilibrio indifferente; è dunque necessario perchè l'istrumento possa essere adoperato che si abbia:

$$FF_1 > FF'$$

oppure,

$$FF_1 = FF'.$$

Ma

$$EE' = d\alpha \times \frac{OB}{O'C} \times O'D$$

e sulla figura abbiamo

$$GG_1 = GG' + EE',$$

cioè

$$CG_1 = \delta\alpha \times OA + \delta\alpha \times \frac{OB}{O'C} \times O'D$$

Ma

$$\frac{FF_1}{GG_1} = \frac{EF}{EG}.$$

Dunque:

$$FF_1 = \frac{EF}{EG} \times \delta\alpha \left(OA + \frac{OB}{O'C} \times O'D \right),$$

e perchè l'istrumento possa essere impiegato è necessario si abbia:

$$\frac{EF}{EG} \times \delta\alpha \left(OA + \frac{OB}{O'C} \times O'D \right) > \delta\alpha \frac{OB}{O'C} O'D,$$

cioè:

$$\frac{EF}{EG} \times OA > \frac{OB}{O'C} \times O'D \left(1 - \frac{EF}{EG} \right),$$

oppure,

$$\frac{EF}{EG} \times OA > \frac{OB}{O'C} \times O'D \frac{FG}{EG},$$

oppure infine

$$\frac{EF}{EG} > \frac{OB}{OA} \times \frac{O'D}{O'C}.$$

Se questa condizione è adempiuta il punto F s'innalzerà quando il punto H s'abbasserà ed inversamente. La quantità di cui s'abbasserà il punto F sarà eguale alla differenza $FF_1 - FF'$, eguale cioè:

a

$$\frac{EF}{EG} \delta\alpha \left(OA + \frac{OB}{O'C} O'D \right) - \delta\alpha \frac{OB}{O'C} O'D$$

ossia,

$$\delta\alpha \left(\frac{EF}{EG} \times OA - \frac{OB}{O'C} O'D \frac{FG}{EG} \right).$$

Conosciamo dunque la quantità della quale s'abbassa il punto F e la quantità di cui s'innalza il punto H; potremo calcolare i la-

vori virtuali delle forze P e p e scrivere che la loro somma algebrica è eguale a zero qualunque sia $\delta\alpha$, avremo:

$$P\,\delta\alpha\left(\frac{EF}{EG}\,OA-\frac{OB}{O'C}\,O'D\,\frac{FG}{EG}\right)-p\,\delta\alpha\times OH=0.$$

Deduciamo da quest'equazione:

$$\frac{p}{P}=\frac{\frac{EF}{FG}\,OA-OB\,\frac{O'D}{O'C}\times\frac{FG}{EG}}{OH}$$

Tale è il rapporto fra i pesi p e il peso P del corpo che dobbiamo pesare. Perchè questo rapporto sia piccolissimo bisogna che OH sia molto grande ciò che non è sempre possibile; in quest'ultimo caso opereremo sul numeratore per farlo diventare più piccolo che possiamo. Il rapporto $\frac{p}{P}$ si può scrivere

$$\frac{p}{P}=\frac{OA\times FG}{OH\times EG}\left(\frac{EF}{EG}-\frac{OB}{OA}\cdot\frac{O'D}{O'C}\right)$$

La parentesi del secondo membro dell'equazione contiene precisamente la quantità che deve essere più grande di zero perchè l'istrumento possa agire; lasceremo questa parentesi più grande di zero e faremo OA e FG più piccole che si può.

Capitolo V.

Poligoni articolati.

Chiamasi *poligono articolato un sistema di corpi che si suppongono invariabili di forma e articolati gli uni con gli altri senza attrito.* Poichè supponiamo che non vi è attrito, un tal sistema non esiste realmente, ma come questa forza si oppone al moto, quando un sistema di corpi articolati è in equilibrio facendo astrazione dell'attrito, vi sarà a fortiori quando se ne terrà conto.

Di due sorta sono le articolazioni. I due corpi hanno soltanto un punto comune, i due corpi hanno una retta comune.

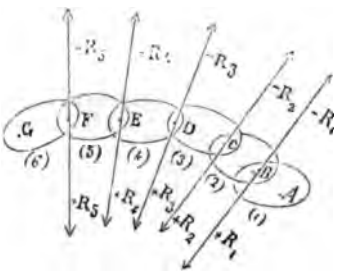
Nella pratica, le articolazioni appartenenti alla prima categoria si realizzano in certi istrumenti per mezzo di una sfera metallica piena fissata all'estremità di un corpo e che gira in una sfera metallica vuota fissata all'estremità dell'altro corpo; quest'articolazione chiamasi *articolazione a ginocchio.*

Quando i due corpi hanno una retta comune, questa retta fa da asse di rotazione. Questo genere d'articolazioni è quello che più generalmente incontrasi nella pratica sotto il nome *d'articolazione a cerniera.*

Basterà studiare le condizioni d'equilibrio dell' articolazioni a ginocchio perchè quando due corpi così collegati sono in equilibrio, lo saranno a fortiori quando ad un'articolazione a ginocchio sostituiremo un'articolazione a cerniera. Quando avremo un poligono articolato, supporremo sempre che i corpi estremi che formano questo poligono sono fissi e studieremo il suo equilibrio applicando ai punti fissi le loro reazioni.

Ciò posto, siano A e G due punti fissi dei due corpi estremi del poligono articolato e siano B, C, D, E, F i punti successivi d'articolazione dei corpi. Sia P_1 l'insieme delle forze applicate al primo

corpo, P_2 l'insieme delle forze applicate al secondo e così via di seguito. Supponiamo di aver resi liberi i due punti fissi A e G dimodochè la reazione del punto A faccia parte delle forze P_1 e la



reazione del punto G faccia parte delle forze P_6: perchè un simile sistema sia in equilibrio, due condizioni sono necessarie e sufficienti.

1° *L'insieme delle forze* P_1, P_2,... P_6 *deve soddisfare alle sei condizioni d'equilibrio d'un solido invariabile libero.*

2° *Se si considera un'articolazione intermedia qualunque e tutti i corpi situati da una stessa parte di quest'articolazione, la somma algebrica dei momenti delle forze applicate a questi corpi deve essere eguale a zero per qualunque asse che passa dall'articolazione scelta;* per esempio se prendiamo l'articolazione D ed i corpi (1), (2), (3) situati a destra di quest'articolazione, la somma dei momenti delle forze P_1, P_2, P_3, presi intorno ad una asse qualunque passante dal punto D dev'essere eguale a zero.

Dico prima di tutto che le due condizioni enunciate sono necessarie, cioè che tutte le volte che vi è equilibrio sono adempiute.

Supponiamo infatti il sistema in equilibrio: se ciò è possiamo solidificare il sistema senza distruggere quest'equilibrio; diventerà un solido invariabile libero; è libero perchè abbiamo resi liberi i punti fissi A e G. Questo sistema invariabile, libero, è in equilibrio per ipotesi, le forze che gli sono applicate P_1, P_2,.... P_6 soddisfano dunque alle sei condizioni d'equilibrio d'un solido invariabile libero, la prima condizione è dunque soddisfatta.

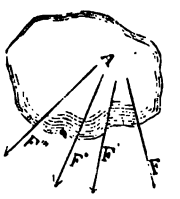
Poichè il sistema è in equilibrio, potremo senza distruggerlo solidificare le articolazioni B, C, E, F e rendere fisso il punto G; la parte a sinistra del punto D sarà per conseguenza del tutto fissa e la parte di destra formerà un solido invariabile non libero poichè

s'articola nel punto D con la parte fissa del poligono. Questo solido formato dai tre corpi a destra del punto D è in equilibrio poichè tutto il sistema è in equilibrio; abbiamo dunque in equilibrio un solido invariabile che ha un punto fisso e in questo caso la somma algebrica dei momenti di tutte le forze applicate a questo solido è eguale a zero per qualunque asse che passa dal punto fisso, dunque la somma dei momenti delle forze P_1, P_2, P_3 sarà eguale a zero per un asse qualunque che passa dall'articolazione D. La seconda condizione è adempiuta.

Dico ora che le due condizioni enunciate sono sufficienti, cioè che se esse sono adempiute il poligono articolato è in equilibrio Per dimostrarlo, dimostreremo prima il lemma seguente.

Lemma.

Se abbiamo un certo numero di forze F, F', F''..... applicate ad un corpo solido e se queste forze sono tali che la somma algebrica dei loro momenti presi intorno ad un asse qualunque che passa da un certo punto A sia eguale a zero, dico che



tutte queste forze hanno una resultante unica R che passa dal punto A.

Infatti se trasportiamo tutte le forze parallelamente a loro stesse avremo una coppia resultante (S, S) e una forza unica R. La coppia resultante (S, S) è eguale a zero perchè il sistema della coppia resultante e della forza è equivalente al sistema delle forze date F, F', F''..... Ma le somme dei momenti di tutte le forze componenti i due sistemi, presi intorno ad un asse passante dal punto A devono essere eguali; la somma dei momenti delle forze date è stata supposta eguale a zero, la forza R passando dal punto A, ha un momento eguale a zero, è dunque necessario che il momento della coppia (S, S) sia eguale a zero, per un asse qualunque passante dal

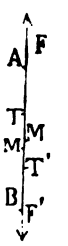
punto A, bisogna cioè che questa coppia sia eguale a zero. La forza R è dunque sola equivalente del sistema delle forze date.

Se applichiamo questo lemma al teorema: poichè supponiamo adempiute le due condizioni enunciate, la somma algebrica dei momenti di tutte le forze P_1 è eguale a zero per un asse qualunque che passa dal punto B e queste forze P_1 possono essere sostituite da una forza unica R_1 applicata nel punto B; così pure la somma dei momenti presi intorno ad un asse qualunque che passa dal punto C delle forze P_1 e P_2 è eguale a zero e queste forze P_1 e P_2 possono essere sostituite da una forza R_2 applicata nel punto C. Ripetendo il medesimo ragionamento per tutte le articolazioni, le forze P_1, P_2, P_3 possono essere sostituite da una forza unica R_3 applicata nel punto D, le forze P_1, P_2, P_3, P_4 da una forza unica R_4 applicata nel punto E e le forze P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 da una forza unica R_5 applicata nel punto E. Ciò posto, applichiamo nel punto B due forze eguali a R_1 e di senso opposto: supponiamo la forza $-R_1$ applicata al corpo di destra e la forza $+R_1$ al corpo di sinistra; facciamo così per tutte le articolazioni: le forze $-R_2$, $-R_3$..... essendo applicate ai corpi che sono a destra dell'articolazione considerata e le forze $+R_2$, $+R_3$.... essendo applicate ai corpi che sono a sinistra di quest'articolazione. Tutte le forze $+R_1$, $+R_2$.... e $-R_1$, $-R_2$.... distruggendosi due a due non cambieranno lo stato d'equilibrio o di non equilibrio del sistema ma è evidente che ogni corpo è individualmente in equilibrio. Prendiamo un corpo qualunque, il quarto per esempio; egli è sottomesso alle forze $P_4 + R_3$ e $-R_4$ ma la forza $+R_3$ è equivalente alle forze P_1, P_2, P_3; il corpo è dunque sottomesso alle forze P_1, P_2, P_3, P_4 cioè alle forze $+R_4$ e $-R_4$ eguali fra loro, di senso contrario e applicate ambedue nel punto E; questo corpo è dunque in equilibrio. L'ultimo corpo è sottomesso alle forze $+R_5$ e P_6 cioè alle forze P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 e come abbiamo supposto, secondo la prima condizione d'equilibrio, che tutte queste forze soddisfano alle sei equazioni d'equilibrio, quest'ultimo solido è in equilibrio e le due condizioni enunciate sono sufficienti.

Poligono funicolare.

Chiamasi così un poligono formato da un filo flessibile e non estensibile, nei diversi punti del quale sono applicate differenti forze.

Consideriamo prima di tutto un filo sollecitato da forze applicate alle sue estremità. Se non ci preoccupiamo del peso del filo, il suo equilibrio è possibile solo quando le forze che sono applicate alle sue due estremità si riducono a due resultanti eguali, di senso contrario e dirette secondo il prolungamento del filo; è di più necessario che il senso di queste forze sia tale che tendano ad allungare il filo. Siano F e F' le due forze che tengono in equilibrio un filo AB flessibile, inestensibile e del quale si trascura il peso. Un



elemento MM' del filo AB dovendo esso pure essere in equilibrio, bisogna ch'alle sue estremità M e M' sia sollecitato da due forze eguali e di senso contrario; chiamando T e T' queste due forze, dobbiamo avere

$$T = T',$$

ma se si considera l'equilibrio della parte MB,

$$T = F'$$

e se si considera l'equilibrio della $M'A$,

$$T' = F$$

Ne risulta che la forza T è eguale alla forza F. Le forze T e T' chiamansi *le tensioni* del filo nei punti M e M'. Qui la tensione del filo è la medesima per tutta la sua lunghezza, ma ciò non sarebbe se si considerasse il peso del filo. Infatti p essendo il peso di un metro di filo, avremo:

$$F = F' + ABp$$

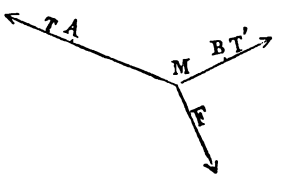
come pure,

$$T = F' + MBp,$$

quest'ultima quantità varia con la posizione del punto M sul filo,

essa è eguale ad F' nel punto B e nel punto A. La tensione è dunque variabile nei differenti punti di un filo in equilibrio.

Consideriamo ora l'equilibrio di un filo sollecitato da due forze



T e T' applicate alle sue estremità A e B e da una forza F applicata in un punto determinato M della sua lunghezza.

Perchè vi sia equilibrio bisogna che queste tre forze T, T', F siano in un medesimo piano e ch'ognuna di esse sia eguale e opposta alla resultante delle due altre; il piano delle tre forze è dunque quello dei tre punti A, B, M. Bisogna che la forza T sia diretta secondo MA, come pure la forza T' dev'essere diretta secondo MB perchè il filo non cambi di forma.

Dobbiamo avere di più

$$\frac{T}{F} = \frac{sen\ (T', F)}{sen\ (T, T')}$$

e

$$\frac{T'}{F} = \frac{sen\ (T, F)}{sen\ (T, T')}.$$

Possiamo concludere da ciò che il filo AMB non può essere in linea retta, poichè se avessimo

$$ang\ (T, T') = 180°,$$

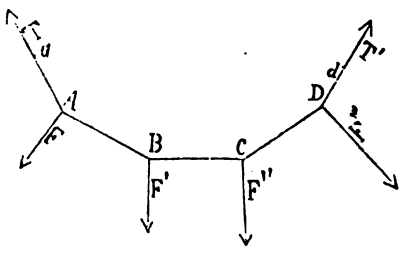
il suo senso sarebbe eguale e zero ed avremmo:

$$T = \infty \quad \text{e} \quad T' = \infty.$$

Più l'angolo che le due tensioni T, T' fanno fra loro si avvicina a 180°, più queste tensioni sono grandi per uno stesso valore di F.

Consideriamo infine un filo $aABCDd$ in equilibrio sotto l'azione delle tensioni T e T' dei lati Aa, Dd e di un numero qualunque di forze esterne F, F', F'', F''' applicate ai vertici della linea spezzata formata dal filo. Siano t, t', t'' le tensioni dei lati intermediarii AB, BC, CD; il sistema deve soddisfare alle sei condizioni di

equilibrio d'un corpo solido e non bastano perchè il sistema può cambiare di forma.



Il sistema essendo in equilibrio, ogni sua parte sarà pure in equilibrio se si considera separatamente. Ogni vertice è in equilibrio sotto l'azione delle tre forze che gli sono applicate ed ogni lato vi è pure sotto l'azione delle quattro forze che lo sollecitano. Da ciò deduciamo prima di tutto che la tensione t è eguale e opposta alla resultante delle forze T e F; questa medesima tensione considerata come applicata in B potrebbe dunque essere sostituita dalle forze T e F trasportate parallelamente a loro stesse in questo punto B. In secondo luogo la tensione t' è eguale e opposta alla resultante delle forze T, F e F' se si suppongono queste forze applicate nel punto B; questa medesima tensione considerata come applicata nel punto C può dunque essere sostituita dalle forze T, F e F' trasportate parallelamente a loro stesse nel punto C e così via di seguito. In terzo luogo la tensione di ogni lato è la stessa come se si trasportassero a ognuna delle sue estremità tutte le forze situate al di là. Per esempio la tensione t' è la stessa come si applicassero nel punto B le forze T, F e F' e nel punto C le forze F'', F''' e T'. Infine tutte le forze trasportate in uno stesso vertice devono farcisi equilibrio e ce lo mostrano le tre prime equazioni d'equilibrio che esprimono che la resultante di traslazione è eguale a zero.

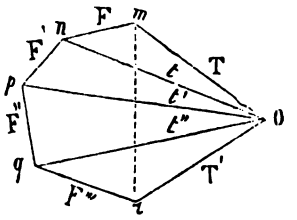
Lo studio del poligono funicolare ci conduce a risolvere il problema seguente.

Trovare la figura del poligono conoscendo la lunghezza di tutti i suoi lati, l'intensità e la direzione delle forze F, F', F''..... e l'intensità, o la direzione delle tensioni estreme T, T'.

Se trasportiamo tutte le forze F, F', F''..... parallelamente a loro stesse in un punto dello spazio, queste forze si comporranno in

una sola R che dovrà essere eguale e opposta alla resultante delle forze T e T'. Se conosciamo soltanto l'intensità delle forze T e T' avremo da costruire un triangolo conoscendo i tre lati, se invece conosciamo le direzioni di queste due forze e non le loro intensità, per avere queste intensità costruiremo un triangolo conoscendo un lato e gli angoli. Nei due casi le tensioni T e T' sono completamente determinate; avremo così la direzione del lato Aa, la direzione del lato AB sarà quella della resultante delle forze T e F; questa resultante darà essa stessa il valore della tensione t, la direzione del lato BC sarà quella della resultante delle forze t e F' e questa resultante darà il valore della tensione t'. Continuando così, otterremo successivamente la direzione di tutti i lati e il valore di tutte le tensioni intermediarie. L'equilibrio dell'ultimo vertice D sarà una verificazione.

Se tutte le forze date sono in uno stesso piano, il problema può essere risolto per mezzo di una costruzione grafica; perciò costruiamo una linea spezzata $mnpqr$, i lati mn, np, pq, qr rappresentando le



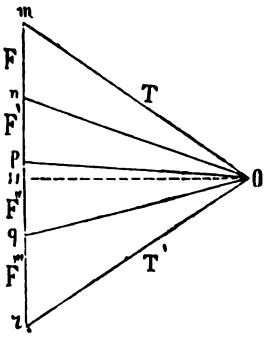
forze $F, F', F'' F'''$; la linea mr che chiude il poligono è la loro resultante di traslazione R. Supponendo conosciute le direzioni delle forze T e T', conduciamo dal punto m una parallela alla direzione di T e dal punto r una parallela alla direzione di T'; queste due rette s'incontreranno in un punto O e le linee Om e Or rappresenteranno le due tensioni T, T' in direzione ed in intensità; se invece di conoscere le direzioni delle forze T e T' conosciamo le loro intensità, dai punti m e r come centri, con dei raggi eguali a T e T' descriveremo degli archi di circonferenza che s'incontreranno in un punto O; le rette mO e rO rappresenteranno le tensioni T, T' in direzione ed in intensità. Ciò fatto, conduciamo On, Op, Oq, queste rette rappresenteranno in direzione i lati intermediari del poligono ed in grandezza le tensioni t, t', t''. Se tutte le forze F, F', F'' ecc. sono verticali, la linea spezzata $mnpqr$ si riduce ad una linea retta

verticale. La costruzione è la stessa come nel caso precedente ma qui il poligono ha alcune proprietà particolari, proprietà che sono evidenti o che possiamo facilmente dimostrare. Queste proprietà sono le seguenti:

1° *Il poligono è in un piano verticale.*

2° *Le proiezioni orizzontali di tutte le tensioni sono eguali.*

3° *La somma algebrica delle proiezioni verticali di due tensioni qualunque è eguale alla somma di tutte le forze esterne intermediarie.*

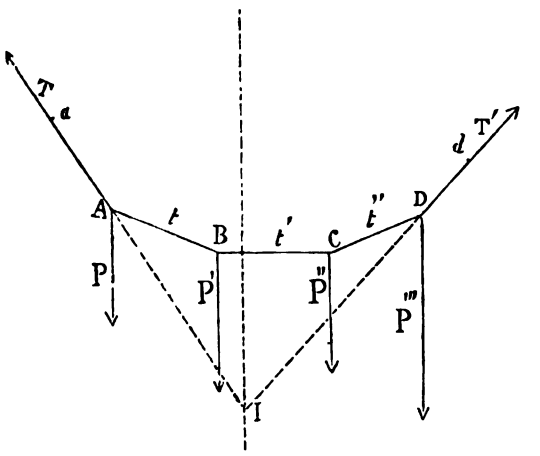


Le due prime proposizioni sono evidenti poichè il piano del poligono è il piano *mOr* e se si conduce *OH* perpendicolare sopra *mr*, questa linea sarà la proiezione di una qualunque delle rette *Om*, *On*, *Op*, *Oq*, *Or*. Per dimostrare la terza proposizione consideriamo per esempio le tensioni *T* e *t''*, la proiezione verticale della prima è *mH* e la proiezione verticale della seconda è *qH;* la somma di queste proiezioni è *mq*, porzione della verticale compresa fra le estremità delle rette *Om* e *Oq* che rappresentano le tensioni considerate, *mq* è la somma delle forze esterne *F*, *F'* e *F''* comprese fra le tensioni *T* e *t''*.

Quando le forze F, F', F'' ecc. sono dei pesi sospesi ai vertici del poligono, il punto d'intersezione delle direzioni di due tensioni qualunque è situato sulla verticale del centro di gravità del sistema formato dai pesi compresi fra queste due tensioni.

Siano per esempio le due tensioni *T* e *T'*, le loro direzioni s'incontrano in un punto *I*. La porzione *ABCD* del filo è in equilibrio sotto l'azione delle tensioni *T*, *T'* e dei pesi *P*, *P'*, *P''*, *P'''*; è dunque necessario che la resultante delle forze *P*, *P'*, *P''*, *P'''* sia eguale e op-

posta a quella delle forze T e T'; la resultante dei pesi P, P', P'', P''' è una forza verticale eguale alla loro somma e passante dal centro delle forze parallele o dal centro di gravità del sistema formato da questi pesi, la resultante delle tensioni T e T' passa dal punto I e dev'essere direttamente opposta a quella dei pesi P, P', P'', P'''; è



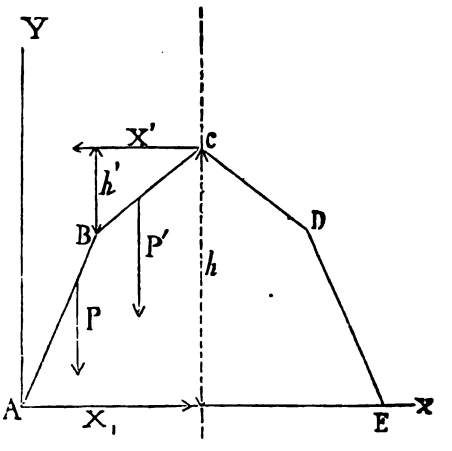
dunque necessario che il punto I si trovi sulla verticale che passa dal centro di gravità di questi pesi.

Tutto ciò che abbiamo detto relativamente al poligono funicolare si può applicare ad un poligono formato da un filo o da un canapo metallico sufficientemente teso. Lo studio del poligono funicolare ha un vasto campo d'applicazione nei ponti sospesi.

Equilibrio d'un' incavallatura.

Supponiamo un'incavallatura composta di quattro pezzi, *AB, BC, CD, DE;* ognuno di questi pezzi sopporterà un certo peso. Supponiamo che come forma e come forza l' incavallatura sia simetrica relativamente alla verticale del punto *C;* ne risulta che le sue due metà agiscono l'una sull'altra secondo delle forze eguali e direttamente opposte; queste forze saranno orizzontali poichè sono simetriche relativamente alla verticale del punto *C;* potremo dunque studiare l'equilibrio d'una metà soltanto dell' incavallatura sostituendo all'altra metà la sua reazione orizzontale nel punto *C.* Sia per esempio *ABC* la porzione che si vuole studiare. Prendiamo un

orizzontale AX, AY perpendicolare a quest'orizzontale e AZ perpendicolare al piano della figura. Siano X e Y le componenti della



reazione del punto fisso A, X' la reazione della parte CDE di cui non ci occupiamo e P, P' gli sforzi dovuti al peso dei pezzi AB, BC ed al carico che sopportano. Sia p l'ascissa del punto d'applicazione della forza P e p' l'ascissa del punto d'applicazione della forza P'; sia h la distanza dal punto A al punto C ed h' quella dal punto B al punto C. L'insieme dei due pezzi AB e BC forma un poligono articolato con una sola articolazione interna nel punto B. Esprimiamo che questo poligono è in equilibrio. La prima condizione è che tutte le forze applicate al sistema, applicandovi anche le reazioni dei punti estremi devono soddisfare alle sei condizioni d'equilibrio d'un solido invariabile libero. Le proiezioni sull'asse delle z sono tutte eguali a zero, quelle sull'asse delle x danno:

$$X + X' = 0 \tag{1}$$

e quelle sull'asse delle y:

$$Y - P - P' = 0. \tag{2}$$

I momenti presi intorno all'asse delle x e a quelle delle y sono eguali a zero, quelli presi intorno all'asse delle z danno:

$$Pp + P'p' + X'h = 0. \tag{3}$$

La seconda condizione è che la somma dei momenti delle forze applicate ai corpi situati da una stessa parte d'un'articolazione in-

termedia è eguale a zero per un asse qualunque passante da quest'articolazione. Le forze e le articolazioni essendo in uno stesso piano, prenderemo semplicemente i momenti relativamente al punto B. Prendiamo per esempio i momenti delle forze applicate ai corpi di destra, avremo:

$$P'(p'-b)+X'h'=0 \qquad (4)$$

b essendo l'ascissa del punto B. Nelle equazioni ottenute abbiamo tre sole incognite X, Y, X': abbiamo dunque una equazione di condizione che si ottiene facilmente deducendo il valore di X' dalle equazioni (3) e (4). L'equazione (3) dà

$$X'=-\frac{Pp+P'p'}{h},$$

l'equazione (4)

$$X'=-\frac{P'(p'-b)}{h}$$

e l'equazione di condizione è

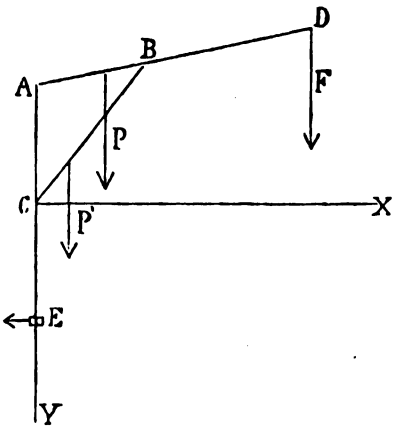
$$\frac{Pp+P'p'}{h}=\frac{P'(p'-b)}{h'}.$$

Se questa condizione non è adempiuta non vi è equilibrio. Possiamo però non sottometterci a questa condizione applicando nel punto A una forza orizzontale X_1 ed avremo allora quattro equazioni con quattro incognite. Praticamente ciò si realizza collegando il punto B con il suo simetrico per mezzo d'una catena; la forza X_1 è la tensione della catena. Calcolando le forze X_1, Y e la loro resultante avremmo lo sforzo fatto dal muro per sopportare l'incavallatura e prendendo una forza eguale e di senso opposto avremmo l'azione dell'incavallatura sul muro, azione che tende a rovesciare il muro e che ci permette perciò di calcolarne l'equilibrio.

Equilibrio d'una grue.

Sia AE l'asta verticale della grue; il punto E è fisso, AB è un pezzo articolato in A che si prolunga fino in D, BC una gamba di forza articolata in B e in C, F il peso del corpo da sollevare, peso che è perciò applicato nel punto D e P, P' i pesi dei pezzi AB, BC. L'insieme dei due pezzi AD e BC forma un poligono ar-

ticolato nel punto B quando siano resi liberi i punti A e C, applicando a questi punti le loro reazioni. Siano X e Y le componenti della reazione del punto A, X' Y' le componenti della reazione del punto C; prendiamo questo punto C per origine e tre assi coordinati



rettangolari CX, CY, CZ, l'asse CZ essendo perpendicolare al piano della figura. Per esprimere che il poligono è in equilibrio bisogna scrivere in primo luogo che tutte le forze applicate a questo poligono soddisfano alle sei condizioni d'equilibrio d'un solido invariabile libero. Le proiezioni sull'asse delle x danno:

$$X + X' = 0,$$

sull'asse delle y:

$$F + P + P' + Y + Y' = 0.$$

Sull'asse delle z tutte le proiezioni sono eguali a zero e la terza equazione d'equilibrio si riduce a

$$0 = 0.$$

I momenti di tutte le forze presi intorno all'asse delle x e all'asse delle y sono tutti eguali a zero. I momenti presi intorno all'asse delle z danno:

$$Pp + P'p' + Ff + Xh = 0.$$

Scriviamo in secondo luogo che la somma dei momenti delle forze applicate ai corpi situati da una stessa parte d'un'articolazione intermedia è eguale a zero per un asse qualunque passante

da quest'articolazione; scriviamo per esempio che questa condizione è soddisfatta per il corpo AD e relativamente ad un asse qualunque passante dall'articolazione intermedia B, cioè, poichè le forze sono tutte nello stesso piano, che la somma dei momenti di tutte queste forze, presi intorno al punto B dev'essere eguale a zero; avremo dunque:

$$F(f-b)+P(p'-b)+Xh'-Yb=0.$$

Abbiamo quattro equazioni e quattro incognite X, Y, X', Y'; potremmo risolvere queste quattro equazioni e dai valori trovati per X, Y, X', Y' dedurre le reazioni dei punti A e C e per conseguenza gli sforzi che si esercitano in queste articolazioni. Se vogliamo lo sforzo che si esercita nell'articolazione B, ricorderemo che deve essere eguale alla resultante di traslazione di tutte le forze applicate sulla retta AD e chiamando X'' e Y'' le componenti della reazione del punto B, dobbiamo avere:

$$X''=X,$$

$$Y''=Y+P+F.$$

Cerchiamo infine la reazione del punto fisso E. Sia P'' il peso dell'albero della grue. Nel punto E vi è un collare al quale è applicata un forza orizzontale X_1. Se X_2 e Y_2 sono le componenti della reazione del punto fisso E e se le applichiamo a questo punto, la grue diventerà un solido invariabile, libero, in equilibrio ed avremo le equazioni

$$X_1+X_2=0.$$

$$F+P+P'+Y_2+P''=0.$$

Le proiezioni sull'asse delle z sono eguali a zero. Prendendo i momenti:

$$X_1 l+Pp+P'p'+Ff=0.$$

Da queste tre ultime equazioni dedurremo X_1, X_2, Y_2; componendo le forze X_2, Y_2 e cambiando di senso la loro resultante, vediamo che gli sforzi sono sopportati dal collare e dal punto fisso E.

Capitolo VI.

Equilibrio delle macchine semplici.

Studieremo l'equilibrio delle macchine semplici preoccupandoci delle *resistenze nocive*. Di tre sorta sono le resistenze nocive:

1° *L'attrito di sdrucciolamento.*
2° *L'attrito di rotolamento.*
3° *La rigidezza delle funi.*

Attrito di sdrucciolamento.

Quando due corpi sono in contatto e che l'uno è in moto relativamente all'altro, se vi è sdrucciolamento si sviluppa una componente tangenziale che si oppone al moto e chiamasi *attrito*.

Leggi di Coulon.

L'attrito di sdrucciolamento, cioè la componente tangenziale che si esercita sopra ogni elemento, *è proporzionale alla pressione normale che si esercita sopra questo elemento, è indipendente dalla velocità e varia con la natura delle superfici in contatto.* Risulta da ciò che *l'attrito totale è indipendente dall'estensione delle superfici in contatto.*

Infatti l'attrito totale è eguale alla somma degli attriti elementari e più la superficie di contatto è grande, più la pressione normale sopportata da ogni elemento è grande e per conseguenza più lo sdrucciolamento elementare è piccolo.

Abbiamo detto che l'attrito è indipendente dalla velocità; bisogna fare a ciò due restrizioni: la prima si è che l'attrito è maggiore al principio del moto che in tutto il tempo che dura questo moto, in secondo luogo per delle velocità grandissime l'attrito è piccolissimo.

Coeficiente d'attrito.

L'attrito A è proporzionale alla pressione normale N, dunque due corpi essendo in contatto abbiamo:

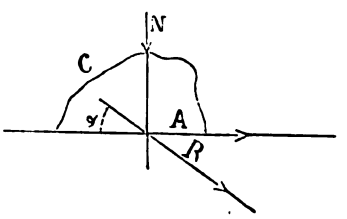
$$\frac{A}{N} K = \text{costante.}$$

Questa costante K s'indica generalmente con la lettera f e chiamasi coeficiente d'attrito. L'esperienza ci ha aiutati per determinare i coeficienti d'attrito ed abbiamo trovato che per delle velocità V grandissime il coeficiente d'attrito f' è dato dalla relazione:

$$f' = \frac{f}{1 + 0{,}03\,V}.$$

Angolo d'attrito.

Supponiamo due corpi in contatto e sia N la pressione normale sopportata dal corpo mobile; si sviluppa una forza di attrito A che



si oppone al moto, il corpo è dunque sottomesso alle forze N e A od alla loro resultante R. Sia Φ l'angolo della resultante R con la normale N, avremo:

$$A = N\,tang\Phi,$$

da dove

$$tang\Phi = \frac{A}{N} = f.$$

Dunque qualunque sia N, $tang\Phi$ è una costante. L'angolo Φ chiamasi *angolo d'attrito*. La composizione delle forze A e N dà:

$$A = R\,sen\Phi = R\,\frac{tang\Phi}{\sqrt{1 + tang^2\Phi}} = R\,\frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

Dunque

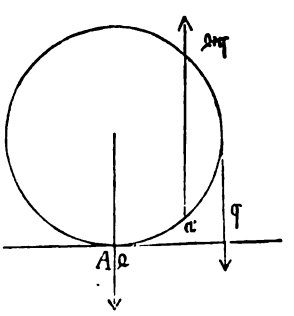
$$\frac{A}{R} = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = f_1.$$

Il rapporto $\frac{A}{R}$ è pure costante; indicasi con la lettera f_1.

Resistenza al rotolamento.

Se supponiamo un cilindro che riposi sopra un piano orizzontale e se questo cilindro e questo piano conservano costantemente la loro forma, queste due superfici si toccheranno secondo una generatrice del cilindro dato. Se di più il peso del cilindro o la resultante di tutte le forze che gli sono applicate è diretta esattamente secondo una verticale passante dall'asse del cilindro e incontra perciò la generatrice di contatto, basterà per mettere in moto questo cilindro di applicargli una forza tangenziale qualunque, anche piccolissima.

Nella pratica questo fenomeno non si produce e per mettere il cilindro in moto è necessaria una forza determinata q. Il cilindro è dunque in equilibrio sotto l'azione del suo peso Q, della forza q e della reazione del piano: bisogna che questa reazione sia eguale e direttamente opposta alla resultante delle forze Q e q; dev'essere eguale cioè a $Q+q$. Per trovare il punto d'applicazione della reazione eguale e direttamente opposta alla forza $Q+q$ scriviamo che il momento della reazione $Q+q$ è eguale e di segno contrario alla



somma dei momenti delle forze Q e q relativamente ad un punto qualunque del piano.

Prendiamo per esempio i momenti relativamente al punto A e sia δ la distanza dal punto A al punto d'applicazione a della reazione $Q + q$, sia R il raggio del cilindro, avremo:

$$(Q + q)\,\delta = q\,R,$$

il punto a è dunque a destra del punto A nel senso del moto e la distanza fra questi due punti è data in valore assoluto dalla relazione

$$\delta = \frac{q\,R}{Q + q}.$$

Coulon fece delle esperienze e trovò che δ è indipendente dal peso Q del cilindro e dal raggio R di detto cilindro; se R diventa piccolissimo, i resultati trovati da Coulon non sono più veri perchè δ varia proporzionalmente a $\sqrt{R}$.

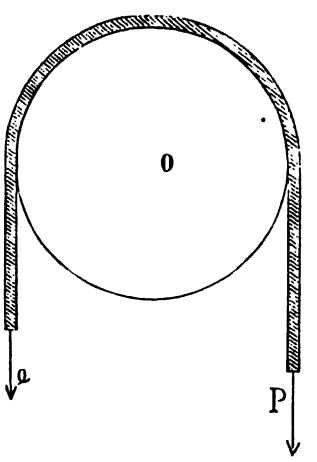
Rigidezza delle funi.

Se supponiamo che una fune passi sopra una puleggia e che ad ogni estremità della fune sia applicata una forza P ed una forza Q, teoricamente se vi è equilibrio fra le forze P e Q, abbiamo

$$P = Q$$

ma nella pratica ciò non è vero anche facendo astrazione dall'attrito.

L'esperienza c'insegna che *se il moto ha luogo nel senso della*



forza P, questa forza P è sempre maggiore della forza Q; ciò avviene perchè la fune per causa della sua rigidezza non si applica

esattamente sulla puleggia dalla parte della forza P e per conseguenza dista di più della forza Q dall'asse di rotazione. Perchè vi sia equilibrio è necessario che la forza Q sia più piccola della forza P.

Le prove di Coulon sulla rigidezza delle funi l'hanno condotto alla formula:

$$R = \frac{A + BQ}{D},$$

nella quale:

$$R = P - Q = \text{(rigidezza della fune)}$$

A e B sono due coeficienti che variano con le dimensioni e la natura delle funi, D è il diametro dalla puleggia espresso in metri.

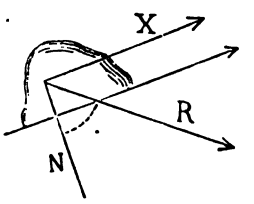
Piano inclinato.

Supponiamo un corpo sopra un piano inclinato e sottomesso all'azione d'un certo numero di forze aventi tutte una resultante unica situata nel piano della figura o nel piano inclinato.

Sia R la resultante di tutte le forze applicate al corpo; supponiamo che questa resultante cada nell'interno della superficie di contatto del corpo con il piano e sia α l'angolo che fa la forza R con la normale al piano. Possiamo decomporre in due la forza R l'una X parallela al piano, l'altra N normale a questo piano.

Tra le due componenti N e X abbiamo la relazione:

$$X = N \, tang\alpha.$$



La forza d'attrito A che si sviluppa in questo caso è

$$A = N \, tang\Phi$$

e perchè vi sia moto bisogna avere:

$$X > A$$

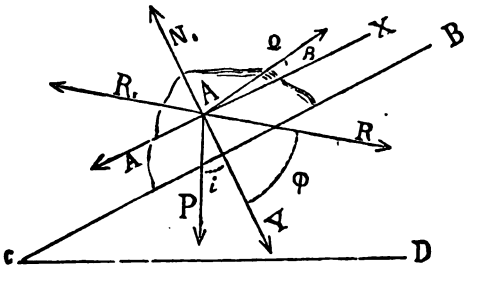
cioè,

$$\alpha > \Phi.$$

Se prendiamo la posizione d'equilibrio, cioè la posizione nella quale il moto è vicino a prodursi, bisogna che la forza R sia eguale e direttamente opposta alla reazione del piano; ma la reazione di un elemento qualunque sulla superficie di contatto fa un angolo Φ con la normale, qui le normali sono tutte parallele, le reazioni saranno parallele anch'esse, la loro resultante farà l'angolo Φ con la normale e sarà applicata in un certo punto della superficie di contatto, questa resultante sarà di più diretta in un senso tale che la sua componente tangenziale sia diretta in senso inverso del moto e che la sua componente normale tenda ad allontanare il corpo dal piano. Poichè la resultante di tutte le forze dev'essere eguale e opposta alla reazione del piano sopra il corpo, ne concluderemo che se un corpo è sul punto di muoversi sopra un piano inclinato, la resultante di tutte le forze applicate a questo corpo dovrà fare un angolo Φ con la normale al piano e dovrà di più avere una direzione tale che la sua componente normale tenda a mantenere il corpo sul piano, che la sua componente tangenziale sia diretta nel senso del moto e che infine vada a cadere nell'interno della superficie di contatto. La grandezza di questa forza può esser qualunque perchè sarà sempre annullata dalla reazione del piano che supponiamo possa resistere a qualunque sforzo.

Come caso particolare studiamo il moto di un corpo pesante sopra un piano inclinato e sottomesso all'azione d'una forza Q situata nel piano della figura; cerchiamo a quali condizioni il corpo si muoverà con un moto uniforme e parallelamente al piano inclinato.

Supponiamo in primo luogo che il corpo abbia un moto ascendente, la resultante R delle forze P e Q dovrà cadere nell'interno



della superficie di contatto, fare l'angolo Φ con la normale, avere la componente tangenziale nel senso del moto e la componente nor-

male esercitare una pressione sul piano. La reazione R_1 del piano è eguale e direttamente opposta alla forza R. Poichè supponiamo che il corpo ha un moto uniforme, vi è equilibrio fra le forze P, Q, R, oppure, fra le forze P, Q, A, N_1; queste due ultime essendo le componenti della forza R. Prendiamo per origine delle coordinate il centro di gravità del corpo, per assi delle x e delle y la componente tangenziale e la componente normale della forza R_1 prolungate e per asse delle z una perpendicolare al piano della figura. Le proiezioni sull'asse delle x danno:

$$(1) \qquad Q\cos\beta - P\,seni - A = 0.$$

Le proiezioni sull'asse delle y:

$$(2) \qquad P\cos i - Q\,sen\beta - N_1 = 0.$$

Le proiezioni sull'asse delle z sono tutte eguali a zero e la terza equazione d'equilibrio si riduce

$$0 = 0.$$

Tutte le forze passando dall'origine delle coordinate incontrano tutte i tre assi coordinati e perciò le tre ultime equazioni d'equilibrio si riducono a

$$0 = 0.$$

Sappiamo che

$$A = N_1 f;$$

sostituendo ad A il suo valore nell'equazione (1) si ha:

$$Q\cos\beta - P\,sen\,i - f\,N_1 = 0.$$

Eliminando N_1 fra quest'equazione e l'equazione (2) abbiamo

$$P = Q\,\frac{f\,sen\beta + \cos\beta}{f\cos i + sen\,i}$$

oppure,

$$Q = P\,\frac{sen\,i + f\cos i}{\cos\beta + f\,sen\,\beta}.$$

Ma

$$f = tang\,\Phi = \frac{sen\,\Phi}{\cos\Phi}$$

per conseguenza

$$Q = P\,\frac{sen\,(i + \Phi)}{\cos\,(\beta - \Phi)}.$$

Se dunque per uno stesso valore di P vogliamo il valore minimo di Q, l'otterremo quando

$$\cos(\beta - \Phi) = 1,$$

da dove

$$\beta = \Phi,$$

Q' essendo questo valore minimo avremo:

$$Q' = P \operatorname{sen}(i + \Phi).$$

Cerchiamo il rapporto del lavoro motore al lavoro resistente utile e supponiamo perciò che il corpo abbia percorso uno spazio x parallelamente al piano inclinato. Il lavoro motore $\mathscr{L}_m$ è

$$\mathscr{L}_m = Qx \cos\beta$$

ed il lavoro utile $\mathscr{L}_u$,

$$\mathscr{L}_u = Px \operatorname{sen} i.$$

Il rapporto del lavoro motore al lavoro utile è

$$\frac{\mathscr{L}_m}{\mathscr{L}_u} \frac{Q}{P} \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen} i}.$$

Ma abbiamo trovato

$$Q = P \frac{\operatorname{sen} i + f \cos i}{\cos\beta + f \operatorname{sen}\beta}.$$

dunque

$$\frac{\mathscr{L}_m}{\mathscr{L}_u} = \frac{P \dfrac{\operatorname{sen} i + f \cos i}{\cos\beta + f \operatorname{sen}\beta}}{P} \times \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen} i},$$

$$\frac{\mathscr{L}_m}{\mathscr{L}_u} = \frac{\operatorname{sen} i + f \cos i}{\cos\beta + f \operatorname{sen}\beta} \times \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen} i}.$$

Supponiamo ora che il corpo abbia un moto uniforme discendente, la forza d'attrito A avrà cambiato di senso, proiettando le forze sull'asse delle x avremo:

$$Q \cos\beta - P \operatorname{sen} i + A = 0$$

proiettandole sull'asse delle y

$$P \cos i - Q \operatorname{sen}\beta - N_1 = 0$$

e come abbiamo sempre

$$A = f N_1,$$

la prima equazione si riduce a

$$Q \cos\beta - P \operatorname{sen} i + f N_1 = 0.$$

Eliminando N_1 fra queste due equazioni si ottiene

$$Q = P \frac{sen\, i - f \cos i}{\cos \beta - f\, sen\, \beta},$$

ma

$$f = tang\, \Phi = \frac{sen\, \Phi}{\cos \Phi},$$

così abbiamo:

$$Q = P \frac{sen\, i \cos \Phi - sen\, \Phi \cos i}{\cos \beta \cos \Phi - sen\, \beta\, sen\, \Phi}$$

oppure,

$$Q = P \frac{sen\, (i - \Phi)}{\cos (\beta + \Phi)}.$$

Il valore di β che farà sì che il valore di Q sia il minore possibile per un valore dato dell'angolo i è tale che

$$\beta + \Phi = 0,$$

da dove

$$\beta = - \Phi$$

La forza Q sarebbe dunque diretta al disotto del piano.

Facendo variare l'angolo del piano inclinato troviamo che per

$$i = \Phi,\ Q = 0.$$

È così che sono stati determinati i coeficienti d'attrito dei differenti corpi.

Cuneo isocele.

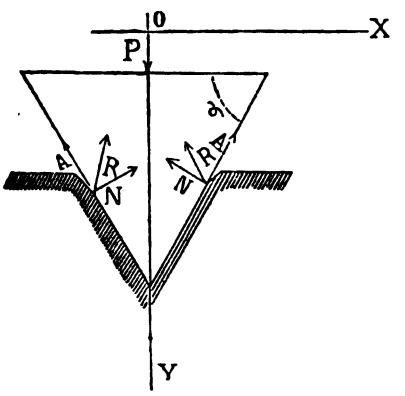
Supponiamo un cuneo sottomesso ad una forza verticale P; cerchiamo quale deve essere questa forza perchè scenda con un moto uniforme. Il cuneo nello scendere che fa è sottomesso sopra ognuna delle sue faccie ad una reazione R proveniente dal corpo nel quale penetra e avente una componente normale N ed una componente tangenziale A tale che

$$A = f N.$$

Scriviamo che vi è equilibrio fra la forza P e le due reazioni

R oppure fra la forza P e le forze A e N. Le proiezioni sull'asse delle x danno:

$$A\cos\alpha - A\cos\alpha + N\,\mathrm{sen}\,\alpha - N\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0.$$



Le proiezioni sull'asse delle y

$$P - 2A\,\mathrm{sen}\,\alpha - 2N\cos\alpha = 0.$$

L'asse delle z essendo perpendicolare al piano della figura, tutte le proiezioni sopra quest'asse sono eguali a zero.

L'ultima equazione si può scrivere:

$$P - 2fN\,\mathrm{sen}\,\alpha - 2N\cos\alpha = 0,$$

da dove

$$P = 2N(f\,\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\alpha).$$

Supponiamo che si voglia levare il cuneo e che dobbiamo applicare perciò una forza P' diretta in senso inverso della forza P. Il senso dell'attrito sarà cambiato, le proiezioni sull'asse delle x si distruggeranno due a due, quelle sull'asse delle z saranno sempre eguali a zero e quelle sull'asse delle y daranno

$$-P' + 2fN\,\mathrm{sen}\,\alpha - 2N\cos\alpha = 0,$$

da dove

$$P' = 2N(-\cos\alpha + f\,\mathrm{sen}\,\alpha),$$

$$P' = 2N(f\,\mathrm{sen}\,\alpha - \cos\alpha).$$

Se il valore di P' fosse negativo, ciò significherebbe che bisogna opporsi al suo moto ascensionale; in questo caso avremmo

$$\cos\alpha > f\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

$$\frac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha} > f.$$

Ma

$$f = tang\,\Phi,$$

dunque

$$\frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} > tang\,\Phi$$

cioè

$$tang\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > tang\,\Phi,$$

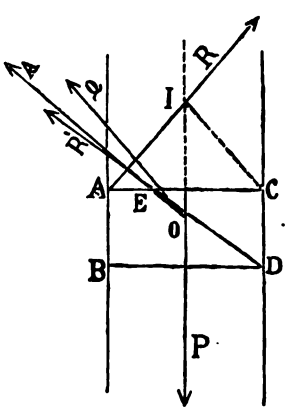
$$\frac{\pi}{2} - \alpha > \Phi,$$

$$\alpha < \frac{\pi}{2} - \Phi.$$

In un buon cuneo è dunque necessario che *la metà dell'angolo della punta sia più piccolo dell'angolo d'attrito.*

Moto d'una capsula fra due guide.

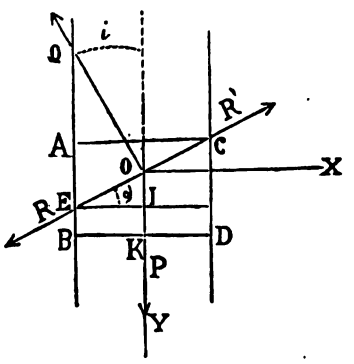
Sia una capsula *ABCD* guidata nel suo moto da due guide *AB*, *CD*. Due forze sono applicate alla capsula, la forza *P* che proviene dall'azione dello stantuffo e la forza *Q* dovuta all'azione della biella.



Supponiamo che la capsula abbia un moto uniforme nel senso della forza *P*. I lati della capsula paralleli alle guide non le toccano simultaneamente, il contatto può dunque aver luogo secondo *AB*, secondo

CD, secondo *AD* od infine secondo *BC.* Se la forza *Q* è diretta a sinistra il contatto secondo *CD* è impossibile perchè la reazione di *CD* sarebbe diretta da destra a sinistra e bisognerebbe che vi fosse equilibrio fra questa reazione e le forze *P* e *Q,* ciò che non è possibile poichè se proiettiamo le forze sopra un asse perpendicolare alla direzione della forza *P,* la proiezione di questa forza sarà eguale a zero, ma la forza *Q* e la reazione di *CD* essendo ambedue dirette da destra a sinistra avrebbero delle proiezioni di medesimo senso e che per conseguenza non potrebbero annullarsi. La forza *Q* essendo sempre diretta a sinistra, il contatto secondo *AD* non può aver luogo perchè se ciò fosse si svilupperebbero nei punti *A* e *D* delle reazioni *R* e *R'* facenti con la normale l'angolo d'attrito e s'incontrerebbero in un punto *E* situato forzatamente a sinistra della verticale del punto *O* poichè *R'* sarebbe parallela a *CI;* vi sarebbe allora equilibrio fra la resultante delle forze *R* e *R'* che passerebbe dal punto *E* e la resultante delle forze *P* e *Q* applicate nel punto *O;* queste due resultanti dovrebbero adunque essere eguali e direttamente opposte, la loro direzione comune dovrebbe essere *OE* ma la resultante delle forze *P* e *Q* sarebbe forzatamente diretta verso *OE* come pure la resultante delle forze *R* e *R';* queste due resultanti non potrebbero dunque essere dirette in senso contrario perchè non vi sarebbe equilibrio e per conseguenza non vi è contatto secondo *AD.*

Supponiamo che il contatto abbia luogo secondo il lato *AB:* il problema si riduce a studiare il moto d'un corpo *ABCD* che sdruc-



ciola sopra un piano *AB* sollecitato dalla resultante *R* delle forze *P* e *Q.* Bisogna che le quattro condizioni d'equilibrio trovate quando

abbiamo studiato il piano inclinato, siano soddisfatte pure in questo caso; è perciò necessario che la resultante R passi da un punto E della superficie di contatto, che questa resultante faccia con la componente normale un angolo eguale all'angolo d'attrito Φ, che la componente tangenziale sia diretta nel senso del moto e che infine la sua componente normale eserciti una pressione sul corpo $ABCD$ per obbligarlo a restare sul piano AB. Perchè la prima condizione sia adempiuta bisogna avere

$$OI < OK,$$

ma la seconda condizione ci dà

$$OI = EI \, tang \, \Phi,$$

dunque

$$EI \, tang \, \Phi < OK.$$

Se facciamo

$$AC = a, \; AB = b,$$

abbiamo:

$$\frac{1}{2} \, a \, tang \Phi < \frac{1}{2} \, b$$

oppure,

$$a \, tang \, \Phi < b$$

ma

$$tang \, \Phi > f;$$

possiamo dunque scrivere:

$$b > fa.$$

Se questa condizione è adempiuta, il contatto può aver luogo secondo AB; cerchiamo in questo caso le condizioni d'equilibrio fra le forze P, Q e la reazione del piano AB, reazione che può essere sostituita dalle sue componenti N e A, sapendo che

$$A = f \, N.$$

Se prendiamo tre assi coordinati, rettangolari e che passano dal punto O, proiettando tutte le forze sopra questi tre assi avremo, sull'asse delle x

$$N - Q \, sen \, i = 0,$$

sull'asse delle y

$$P - f \, N - Q \, cos \, i = 0.$$

Le proiezioni sull'asse delle z ed i momenti di tutte le forze presi intorno ai tre assi coordinati sono eguali a zero, le quattro ultime equazioni d'equilibrio si riducono a

$$0 = 0.$$

Eliminando N fra le due equazioni trovate,

$$P = Q\,(\cos i + f \operatorname{sen} i):$$

abbiamo così una relazione fra la potenza e la resistenza.

Il secondo caso possibile è che il contatto abbia luogo nei punti B e C; vi sarà allora equilibrio fra le forze P, Q e le componenti delle reazioni dei due punti B e C che sono N e fN per il punto B, N' e fN' per il punto C. Proiettiamo le forze sopra i tre medesimi assi. Sull'asse delle x abbiamo

$$N - N' - Q \operatorname{sen} i = 0, \tag{1}$$

sull'asse delle y

$$P - fN - fN' - Q\cos i = 0. \tag{2}$$

Come precedentemente, le proiezioni di tutte le forze sull'asse delle z sono eguali a zero, i momenti presi intorno agli assi delle x e delle y sono pure eguali a zero e quelli presi intorno all'asse delle z danno, facendo

$$AC = a,\ AB = b,$$

$$fN\frac{a}{2} - N\frac{b}{2} - \frac{N'b}{2} - fN'\frac{a}{2} = 0. \tag{3}$$

Per eliminare N e N' fra queste tre equazioni (1), (2) e (3), deduciamo il valore di $N - N'$ dall'equazione (1),

$$N - N' = Q \operatorname{sen} i$$

ed il valore di $N + N'$ dall'equazione (2)

$$N + N' = \frac{P - Q\cos i}{f}.$$

L'equazione (3) si può scrivere,

$$f\frac{a}{2}(N - N') - \frac{b}{2}(N + N') = 0;$$

sostituendo a $N - N'$ ed a $N + N'$ i loro valori,

$$f\frac{a}{2}Q \operatorname{sen} i - \frac{b}{2}\frac{P - Q\cos i}{f} = 0,$$

da dove

$$P = Q\frac{f^2 a \operatorname{sen} i + b\cos i}{b}$$

oppure

$$P = Q\left(\cos i + \frac{f^2 a}{b}\operatorname{sen} i\right).$$

Poichè abbiamo supposto che tutte le forze avevano un senso determinato ne resulta che dobbiamo avere dei resultati positivi: P è positivo, l'equazione (2) dà:

$$N = \frac{P - f N' - Q \cos i}{f}.$$

Se N' è positivo N lo sarà pure e perchè vi sia equilibrio per il contatto BC basta che si abbia

$$N' > 0$$

Combinando le equazioni (1) e (3) abbiamo per N':

$$N' = \left(f\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)\frac{Q \operatorname{sen} i}{b},$$

$$N' = \frac{1}{2}\left(f\frac{a}{b} - 1\right) Q \operatorname{sen} i$$

e per ottenere $N' > 0$, è necessario avere

$$\frac{fa}{b} - 1 > 0,$$

da dove

$$fa > b$$

In questo caso la condizione d'equilibrio è contraria a quella trovata quando il contatto ha luogo secondo AB perchè in questo caso bisogna avere

$$fa < b.$$

Quando il contatto ha luogo secondo BC l'equazione che abbiamo trovata

$$P = Q\left(\cos i + \frac{fa^2}{b}\operatorname{sen} i\right)$$

dimostra, fa essendo più grande di b e per conseguenza $\frac{fa^2}{b}$ essendo più grande di f che per una stessa resistenza Q è necessaria una potenza maggiore nel secondo caso che nel primo: bisogna dunque far sì che si abbia

$$b > fa,$$

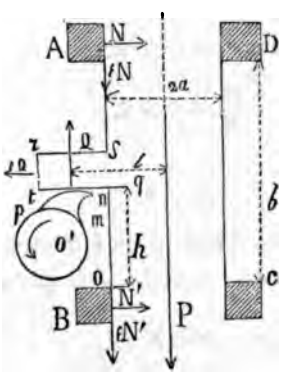
che il contatto abbia luogo cioè secondo AB.

Moto di un martello sollevato da una ruota e guidato da dei sostegni.

Siano quattro sostegni *A, B, C, D.* Supponiamo il peso del martello diretto secondo l'asse della sua asta. Si possono presentare quattro casi:

1° Il contatto a luogo secondo *DC*
2° » » *AC*
3° » » *AB*
4° » » *BD*

Facendo un ragionamento analogo a quello fatto quando abbiamo studiato il moto d'una capsula vedremmo che il contatto non può aver luogo che secondo *AB* o secondo *BD.*



Supponiamo che il contatto abbia luogo secondo *AB.* Vi sarà equilibrio fra le forze *P, Q,* le reazioni dei sostegni e l'attrito fra la parte *mnp* della ruota e la parte *qrst* del martello, attrito che agisce in senso inverso della ruota.

Siano N e N' le reazioni normali dei due sostegni, *A, B; fN, fN'* gli attriti del martello contro i sostegni.

Proiettiamo le forze sopra tre assi coordinati. Sull'asse delle x abbiamo:

$$N + N' - f\,Q = 0.$$

Sull'asse delle y tutte le proiezioni sono eguali a zero e sull'asse delle z

$$P + f N + f N' - Q = 0.$$

Se l'origine è al punto O, i momenti presi intorno agli assi delle x e delle y sono eguali a zero, per i momenti presi intorno all'asse delle z

$$P a + Q (l - a) - f Q h + N b = 0.$$

Eliminando N e N' fra queste tre equazioni avremo:

$$P - Q + f^2 Q = 0$$

ossia,

$$P - Q (1 + f^2) = 0,$$

da dove,

$$Q = \frac{P}{1 + f^2}.$$

Il senso delle forze essendo quello secondo il quale agiscono realmente, bisogna che queste forze siano sempre positive; la forza Q lo sarà sempre poichè

$$f > 0$$

Cerchiamo N e N'. L'ultima equazione può scriversi

$$P a + \frac{P}{1 + f^2} (l - a) - f \frac{P}{1 + f^2} h + N b = 0,$$

da dove

$$N = P \frac{f h - l + a f^2}{b (1 + f^2)}$$

e per conseguenza

$$N' = P \frac{a f^3 + l - f h - b f}{b (1 + f^2)}.$$

I denominatori di queste due ultime equazioni sono positivi perchè

$$f > 0;$$

i numeratori saranno anche loro positivi, e considerando il valore di N bisogna avere:

$$l < f h + a f^2,$$

considerando il valore di N':

$$l > a f^2 - f h - b f.$$

Cerchiamo il rapporto fra il lavoro motore ed il lavoro utile resistente.

Se il martello sale d'una quantità z, il lavoro motore è

$$\mathscr{L}_m = QZ$$

ed il lavoro utile

$$\mathscr{L}_u = PZ,$$

da dove:

$$\frac{\mathscr{L}_m}{\mathscr{L}_u} = \frac{Q}{P} = \frac{1}{1+f^2}.$$

Supponiamo ora che il contatto abbia luogo secondo BD. Siano N, fN le reazioni normali e tangenziali del punto D e N', fN' le reazioni normali e tangenziali del punto B.

Proiettiamo tutte le forze sopra i tre assi rettangolari coordinati; sopra l'asse delle x abbiamo

$$N' - N - fQ = 0,$$

sopra l'asse delle y tutte le proiezioni sono eguali a zero: sopra l'asse delle z

$$P + fN + fN' - Q = 0.$$

I momenti presi intorno all'asse delle x ed all'asse delle z sono eguali a zero e se prendiamo per origine il punto O avremo per i momenti presi intorno all'asse delle y

$$Pa + Q(l-a) - fQh - Nb + 2fNa = 0.$$

Eliminando N e N' fra queste tre equazioni avremo, moltiplicando la prima per f e sottraendola dalla seconda:

$$P + 2fN + f^2Q - Q = 0,$$

da dove:

$$N = \frac{Q - P - f^2Q}{2f}.$$

Sostituendo ad N il proprio valore nella terza equazione, si ha:

$$Pa + Q(l-a) + fQh - \frac{Q - P - f^2Q}{2f} b + (Q - P - f^2Q)\, a = 0,$$

da dove

$$Q = P \frac{b}{b + 2f^2h + 2f^2a - 2fl - f^2b}.$$

Se dall'equazione

$$N = \frac{Q - P - f^2 Q}{2f} = \frac{Q(1 - f^2) - P}{2f}$$

deduciamo il valore di Q e lo sostituiamo nella terza equazione, avremo

$$N = P \frac{l(1 - f^2) - f^2 b - b - 2f^3 h - 2f^3 + 2fl}{2fb + 4f^3 h + 4f^4 a + 4f^2 l - 2f^3 b}$$

oppure,

$$N = P \frac{l - f^2 a - fh}{b + 2f^2 h + 2f^3 a + 2fl - f^2 b}.$$

Per il valore di N' la prima equazione dà

$$N' = fQ + N,$$

Dunque se Q e N sono positivi N' è pure positivo. Perchè Q sia positivo bisogna avere:

$$l > fh + f^2 a.$$

Le condizioni trovate sono dunque in questo caso completamente differenti di quelle trovate nel primo; se N non soddisfa a queste condizioni è impossibil cosa far salire il martello.

Il rapporto del lavoro motore al lavoro utile resistente è in questo caso

$$\frac{\mathscr{L}_m}{\mathscr{L}_u} = \frac{P}{Q} = \frac{b}{b + 2f^2 h + 2f^3 a + 2fl - f^2 b}$$

oppure,

$$\frac{\mathscr{L}_m}{\mathscr{L}_u} = \frac{1}{1 - f^2 + 2f\left(\frac{fh + f^2 a - l}{b}\right)}.$$

Ma dobbiamo avere

$$l > fh + f^2 a;$$

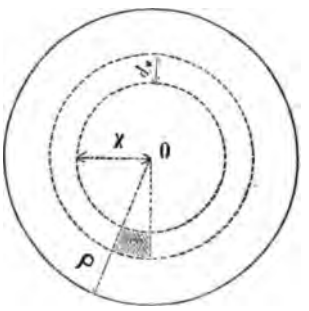
la frazione che è al denominatore del secondo membro dell'equazione è dunque negativa e per conseguenza

$$\frac{1}{1 - f^2 + 2f\frac{fh + f^2 a - l}{b}} > \frac{1}{1 - f^2}$$

Il rapporto del lavoro motore al lavoro utile è dunque più grande nel secondo che nel primo caso: questo secondo caso è il più sfavorevole e bisogna fare in modo che il contatto si effettui secondo *AB*.

Attrito di un perno sopra un dado metallico.

Supponiamo conosciuto il raggio ρ del cerchio di contatto e la forza verticale Q sopportata dall'asse; questa forza Q è uniformemente ripartita sopra la superficie. Cerchiamo la somma dei lavori elementari delle forze d'attrito prodotte dalla pressione esercitata dalla forza Q sopra tutti gli elementi della superficie; cercheremo poi il lavoro totale dell'attrito per una rotazione data. Sia *OA* il



cerchio di contatto, decomponiamolo in elementi annulari, il raggio del cerchio interno essendo x e l'altezza della zona dx; decomponiamo ognuna di queste zone in elementi di superficie ω.

La forza Q essendo ripartita uniformemente sopra tutta la superficie del cerchio avremo in ogni punto $\frac{Q}{\pi\rho^2}$ e per l'elemento ω: $\frac{Q}{\pi\rho^2}\omega$; la forza d'attrito corrispondente sarà $f\frac{Q}{\pi\rho^2}\omega$. Il lavoro di una forza applicata ad un corpo che gira intorno ad un asse essendo eguale al momento di questa forza relativamente all'asse, moltiplicato per l'angolo infinitamente piccolo della rotazione, se $d\alpha$ è lo spostamento angolare, il lavoro elementare della forza d'attrito per un elemento ω sarà $f\frac{Q}{\pi\rho^2}\omega \times x \times d\alpha$; $d\alpha$ è una costante perchè tutti i punti girano dello stesso angolo: se vogliamo il lavoro di una sola

zona, x sarà pure una costante ed avremo per il lavoro corrispondente a questa zona

$$f\frac{Q}{\pi\rho^2}x\,d\alpha\int\omega = f\frac{Q}{\pi\rho^2}2\pi x^2\,dx\,d\alpha,$$

e

$$f\frac{Q}{\pi\rho^2}x\,d\alpha\int\omega = f\frac{2Q}{\rho^2}d\alpha\,x^2\,dx.$$

Per avere il lavoro totale bisogna integrare facendo variare x da zero a ρ ed il lavoro totale $\mathscr{L}$ per lo spostamento $d\alpha$ è

$$\mathscr{L} = \frac{2fQ}{\rho^2}d\alpha\frac{\rho^3}{3} = fQ\frac{2}{3}\rho\,d\alpha.$$

Questo lavoro è lo stesso come se la forza Q fosse applicata ai $\frac{2}{3}$ del raggio ρ. Per avere il lavoro per uno spostamento finito bisogna integrare facendo variare $d\alpha$ da 0 a 2π se si vuole il lavoro $\mathscr{L}$ per un giro completo del perno; questo lavoro è

$$\mathscr{L} = \frac{4}{3}\pi f Q\rho.$$

Può farsi che la superficie di contatto sia una corona annulare. Sia ρ il raggio esterno e ρ' il raggio interno della corona, la sua superficie è $\pi(\rho^2-\rho'^2)$, la pressione esercitata dalla forza Q sopra un punto di questa superficie è $\frac{Q}{\pi(\rho^2-\rho'^2)}$, la pressione esercitata sull'elemento ω è $\frac{Q}{\pi(\rho^2-\rho'^2)}\omega$, la forza d'attrito che si esercita sopra quest'elemento è $f\frac{Q}{\pi(\rho^2-\rho'^2)}\omega$ ed il lavoro di questa forza per una rotazione $d\alpha$ è $\frac{fQ}{\pi(\rho^2-\rho'^2)}\omega\,d\alpha\,x$; infine il lavoro è

$$\frac{2\pi fQ}{\pi(\rho^2-\rho'^2)}x^2\,d\alpha\,dx = \frac{2fQ}{\rho^2-\rho'^2}d\alpha\,x^2\,dx.$$

Per avere il lavoro per la superficie tutt'intiera della corona bisogna integrare facendo variare x da ρ' fino a ρ; avremo allora:

$$\frac{2}{3}fQ\,d\alpha = \frac{\rho^3-\rho'^3}{\rho^2-\rho'^2} = \frac{2}{3}\frac{fQ\,d\alpha\,\rho^2+\rho\rho'+\rho^2}{\rho+\rho'}.$$

Si esprime qualche volta questo lavoro in funzione del raggio medio ρ_1,

$$\rho_1 = \frac{\rho + \rho'}{2};$$

s essendo lo spessore della corona:

$$s = \rho - \rho'$$

e come abbiamo

$$\frac{\rho^2 + \rho\rho' + \rho'^2}{\rho + \rho'} = \frac{\rho^2 + 2\rho\rho' + \rho'^2}{\rho + \rho'} - \frac{\rho\rho'}{\rho + \rho'},$$

$$\frac{\rho^2 + \rho\rho' + \rho'^2}{\rho + \rho'} = \rho + \rho' - \frac{\rho\rho'}{\rho + \rho'} = 2\rho_1 - \frac{\rho\rho'}{2\rho_1}.$$

Ma

$$4\rho\rho' = (\rho + \rho')^2 - (\rho - \rho)^2 = 4\rho_1^2 - s^2,$$

infine

$$\frac{\rho^2 + \rho\rho' + \rho'^2}{\rho + \rho'} = 2\rho_1 - \frac{4\rho_1^2 - s^2}{8\rho_1},$$

$$\frac{\rho^2 + \rho\rho' + \rho'^2}{\rho + \rho'} = 2\rho_1 - \frac{\rho_1}{2} + \frac{s^2}{8\rho_1} = \frac{3}{2}\rho_1 + \frac{s^2}{8\rho_1};$$

il lavoro sarà dunque eguale a

$$\pi f Q\left(2\rho_1 + \frac{s^2}{6\rho_1}\right) = 2\pi f Q\left(\rho_1 + \frac{s^2}{12\rho_1}\right)$$

e per una rotazione α:

$$\mathscr{L} = \alpha f Q\left(\rho_1 + \frac{s^2}{12\rho_1}\right).$$

Attrito negl' ingranaggi.

Il lavoro dell'attrito per gl'ingranaggi circolari e esterni per un certo tempo è dato dalla formula:

$$\mathscr{L}f = \pi f \mathscr{L}_u\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right),$$

$\mathscr{L}_u$ essendo il lavoro utile, n ed n' il numero di denti delle due

ruote; ne risulta fra il lavoro motore ed il lavoro utile la relazione seguente:

$$\mathscr{L}_m = \mathscr{L}_u \left(1 + \pi f \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)\right);$$

n e n' devono essere adunque grandissimi. Se abbiamo due ruote eguali che ingranano l'una con l'altra, n essendo il numero dei denti d'ambedue le ruote, abbiamo:

$$\mathscr{L}_f = \pi f \mathscr{L}_u \frac{1}{n}$$

e

$$\mathscr{L}_m = \mathscr{L}_u \left(1 + \frac{\pi f}{n}\right).$$

Se si tratta d'ingranaggi interni, n_1 essendo il numero dei denti della ruota esterna

$$\mathscr{L}_m = \mathscr{L}_u \left(1 + \pi f \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n}\right)\right).$$

Si trova che l'attrito aumenta rapidamente con la lunghezza dei denti a tal punto che il moto può diventare impossibile.

Nel caso degl'ingranaggi conici abbiamo le formule:

$$\mathscr{L}_f = \pi f \mathscr{L}_u \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} + \frac{2\cos\theta}{nn'}},$$

$$\mathscr{L}_m = \mathscr{L}_u \left(1 + \pi f \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} + 2\frac{\cos\theta}{nn'}},\right.$$

θ essendo l'angolo degli assi. Supponiamo infine che una ruota ingrani con una vite e di più che la vite conduca la ruota: in questo caso

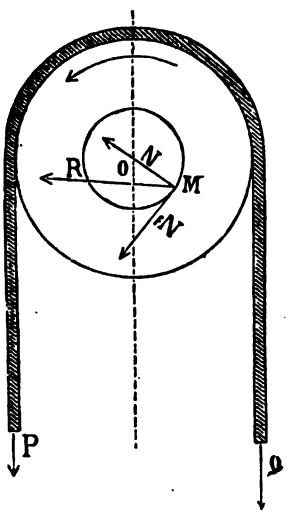
$$\mathscr{L}_m = \mathscr{L}_u \, tang \frac{(i + \Phi)}{tang\, i}$$

dove Φ è l'angolo d'attrito e i l'angolo che fa la tangente alla vite con l'orizzontale. L'attrito è qui maggiore che negl' ingranaggi ordinari.

Puleggie o carrucole.

Cerchiamo una relazione fra la potenza e la resistenza preoccupandoci della rigidezza della fune e della reazione del punto d'appoggio dell'orecchione.

Sia r la distanza dal centro O alla potenza P, r' quella dal centro alla resistenza Q e ρ il raggio dell'orecchione. Bisogna che vi sia equilibrio fra la forza P, la forza Q, la reazione del punto d'appoggio dell'orecchione e il peso π della puleggia. Alla reazione



dell'orecchione sostituiremo la componente normale N e la componente tangenziale fN. Scriviamo che la somma dei momenti di tutte le forze, presi intorno al punto O è eguale a zero. Le forze N e π passando dal punto O, i loro momenti presi intorno a questo punto sono eguali a zero; resta

$$Pr - Qr' - fN\rho = 0.$$

Se non vi fosse attrito, invece della forza P sarebbe necessaria una forza P' ed avremmo in questo caso

$$P'r = Qr'.$$

Di più la rigidezza R della fune è data dalla formula

$$R = \frac{A + BQ}{2\,r},$$

ne risulta che se non vi fosse attrito avremmo

$$P' = Q + \frac{A + BQ}{2\,r},$$

$$P'r = Qr + \frac{A + BQ}{2}.$$

Ma

$$P'r = Qr',$$

dunque

$$Pr - Qr - \frac{A + BQ}{2} - f\,N\,\rho = 0.$$

Cerchiamo il valore *di N;* sappiamo che

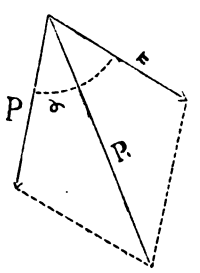
$$f_1 = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}} = \frac{A}{R} = \frac{f\,N}{R}$$

e

$$f\,N = f_1 R,$$

bisogna dunque cercare il valore di R. Poichè la puleggia è in equilibrio sotto l'azione delle forze P, Q, π, R che sono situate nello stesso piano, la forza R dovrà essere eguale e direttamente opposta alla resultante delle forze P, Q, π. Componiamo prima di tutto le forze P e π in una sola P_1; avremo:

$$P_1 = \sqrt{P^2 + \pi^2 + 2\,P\,\pi\,\cos\alpha}.$$



La forza R è dunque eguale e direttamente opposta alla resultante delle forze P_1 e Q; avremo

$$R = \sqrt{P_1^2 + Q^2 + 2\,P_1\,Q\,\cos\,(P_1, Q)}.$$

Sulla figura

$$\frac{sen\beta}{P} = \frac{sen\alpha}{P_1},$$

β essendo l'angolo che fanno fra loro P_1 e P,

$$sen\,\beta = P\,\frac{sen\alpha}{P_1}$$

$$cos\,\beta = \sqrt{\frac{P_1^2 - P^2\,sen^2\alpha}{P_1^2}}.$$

Supponiamo

$$cos\,(P_1, Q) = cos\,(\beta + \gamma):$$

si ha allora

$$cos\,(P_1, Q) = cos\beta\,cos\gamma - sen\beta\,sen\gamma$$

e perciò

$$R = \sqrt{P_1^2 + Q^2 + 2\,Q\left(\sqrt{P_1^2 - P^2\,sen^2\alpha}\,cos\gamma - P\,sen\alpha\,sen\gamma\right)},$$

$$R = \sqrt{P^2+\pi^2+2P\pi\,cos\alpha+Q^2+2Q\left(cos\gamma\sqrt{P^2+\pi^2+2P\pi\,cos\alpha-P^2sen^2\alpha}-Psen\alpha sen\gamma\right)},$$

$$R = \sqrt{P^2+\pi^2+2\,P\pi\,cos\alpha+Q^2+2\,Q\left[cos\gamma\,(P\,cos\alpha+\pi)-P\,sen\alpha\,sen\gamma\right]}.$$

Moltiplicando questo valore di R per f_1, lo potremo sostituire nell'equazione d'equilibrio a fN; isolando questo valore di R moltiplicato per f_1 ed inalzando i due membri dell'equazione al quadrato si ha

$$P^2r^2 + Q^2r^2 + \frac{(A+BQ)^2}{4} - 2\,PQr^2 - (A+BQ)\,Pr + (A+BQ)\,Qr = f_1^2\,\rho^2$$

$$\left[P^2+\pi^2+2\,P\,\pi\,cos\alpha+Q^2+2\,Q\,(cos\gamma\,(P\,cos\alpha+\pi)-P\,sen\alpha\,sen\gamma)\right]$$

da dove si può dedurre P.

Come caso particolare supponiamo

$$\alpha = 0, \gamma = 0;$$

Il primo membro dell'equazione si può scrivere

$$(Pr - Qr)^2 - 2(Pr - Qr)\left(\frac{A + BQ}{2}\right) + \left(\frac{A + BQ}{2}\right)^2$$

ed abbiamo per conseguenza

$$\left(Pr - Qr - \frac{A + BQ}{2}\right)^2 = f_1^2 \rho^2 (P + \pi + Q)^2$$

e $$Pr - Qr - \frac{A + BQ}{2} = f_1 \rho (P + \pi + Q),$$

da dove

$$P = \frac{f_1 \rho (\pi + Q) + Qr + \frac{A + BQ}{2}}{r - f_1 \rho}$$

oppure,

$$P = \frac{1}{r - f_1 \rho}\left(\frac{A}{2} + \pi f_1 \rho + \left(f_1 \rho + r + \frac{B}{2}\right) Q\right).$$

Per fare un'applicazione, supponiamo

$$r = 0,15,$$
$$\rho = 0,05,$$
$$\pi = 10^K$$

e sia una fune bianca di 30 fili ciò che dà:

$$A = 0,222,$$
$$B = 0,0097;$$

supponendo di più

$$f = 0,05,$$
$$Q = 100^K$$

troviamo

$$P = 107^K$$

Il valore trovato or ora per P possiamo metterlo sotto la forma

$$P = a + b\,Q$$

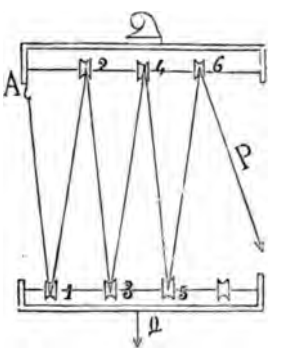
facendo

$$a = \frac{\frac{A}{2} + \pi f r}{r - f_1 \rho},$$

$$b = \frac{\frac{B}{2} + r + f_1 \rho}{r - f_1 \rho}.$$

Equilibrio delle taglie.

Una taglia si compone di due staffe, l'una fissa e l'altra mobile; queste due staffe portano lo stesso numero di puleggie che supporremo identiche. Applichiamo la resistenza Q alla staffa inferiore



e chiamiamo T_1 la tensione della fune che va dal punto fisso A alla puleggia 1, sia T_2 la tensione della fune che va dalla puleggia 1 fino alla puleggia 2 ecc. Tutte le puleggie essendo identiche potremo applicare la formula

$$P = a + bQ,$$

poichè tutte le puleggie sono sollecitate da due forze:

$$T_2 = a + b\,T_1,$$
$$T_3 = a + b\,T_2 = a + b\,(a + b\,T_1),$$
$$T_4 = a + b\,T_3 = a + b\,[a + b\,(a + b\,T_1)]$$

. . . . . .

Tutte queste eguaglianze possiamo scriverle come segue:

$$T_2 = a + bT_1,$$
$$T_3 = a\,(1 + b) + b^2\,T_1,$$
$$T_4 = a\,(1 + b + b^2) + b^3\,T_1$$

. . . . . .

$$T_n = a\,(1 + b + b^2 + \ldots\ldots\ b^{n-2}) + b^n T.$$

ed infine per l'ultima tensione P,

$$P = a\,(1 + b + b^2 + \ldots\ldots\ b^{n-1}) + b_n T_1.$$

La staffa inferiore è in equilibrio sotto l'influenza delle forze Q, T_1, T_2, T_3 .... Tn e queste forze essendo sensibilmente parallele fra loro, abbiamo

$$Q = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots\ldots + T_n.$$

Per poter effettuare l'addizione indicata scriviamo i valori delle differenti tensioni come segue:

$$T_1 = a\,\frac{1+1}{b+1} + T_1,$$

$$T_2 = a\,\frac{b-1}{b-1} + bT_1,$$

$$T_3 = a\,\frac{b^2-1}{b-1} + b^2 T_1,$$

$$T_4 = a\,\frac{b^3-1}{b-1} + b^3 T_1,$$

. . . . . .

$$T_n = a\,\frac{b^{n-1}-1}{b-1} + b^{n-1}\,T_1.$$

Addizionando tutte queste eguaglianze membro a membro,

$$Q = \frac{a}{b-1}\,(1 + b + b^2 + \ldots\ldots + b^{n-1} - n) + T_1\,(1 + b + b_1 + \ldots\ldots + b^{n-1})$$

oppure sostituendo alle progressioni geometriche la loro somma:

$$Q = \frac{a}{b-1}\left(\frac{b^n - 1}{b-1} - n\right) + T_1 \frac{b^n - 1}{b-1}$$

Ma abbiamo già trovato

$$P = a\,(1 + b + b^2 + \ldots\ldots + b^{n-1}) + b_n T_1$$

ossia

$$P = a\,\frac{b^n - 1}{b-1} + b^n T_1$$

Eliminiamo T_1 fra i valori di Q e di P, si ha

$$P = a\,\frac{b^n - 1}{b-1} + \frac{b^n}{b^n - 1}\left(Q\,(b-1) - a\left(\frac{b^n - 1}{b-1} - n\right)\right);$$

ciò che si può scrivere

$$P = a\left(\frac{b^n - 1}{b-1} - \frac{b^n}{b-1} + \frac{n\,b^n}{b^n - 1}\right) + Q\,\frac{b^n\,(b-1)}{b^n - 1},$$

$$P = a\left(\frac{nb^n}{b^n - 1} - \frac{1}{b-1}\right) + Q\,\frac{b^n\,(b-1)}{b^n - 1}.$$

Se si trascurasse l'attrito e la rigidezza delle funi, bisognerebbe nella formula generale

$$P = a + bQ$$

fare

$$a = 0,\ b = 1$$

ed avremmo allora una indeterminazione che possiamo levare facilmente osservando che

$$b^n - 1 = (b-1)\ (1 + b + b^2 + \ldots\ldots + b^{n-1})$$

facendo

$$a = 0$$

il primo termine del secondo membro sparisce e resta

$$P = Q\,\frac{b^n}{1 + b + b^2 + \ldots\ldots + b^{n-1}}.$$

e per

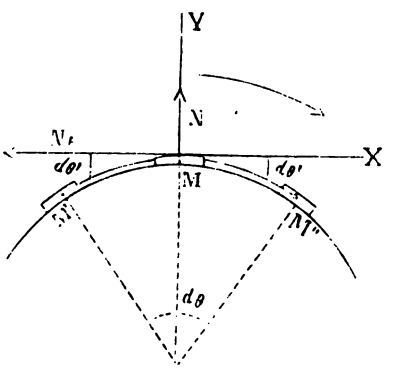
$$b = 1$$

$$P = \frac{Q}{n}.$$

Moto d'una cigna sopra un cilindro fisso.

Supponendo la cigna perfettamente flessibile potremo considerarla come una serie di corpi riuniti da fili flessibili.

Supponiamo che il moto della cigna stia per cominciare e supponiamo ancora che si muoverà con un moto uniforme nel senso della freccia. Esprimiamo ch'un elemento M per esempio della cigna è in equilibrio. L'elemento M è sottomesso alla tensione di MM'' che è T, a quella di MM' che è $T + dT$ ed alla reazione del cilindro che decomporremo in due forze N e fN. Sia $d\theta$ l'angolo delle due



normali al cilindro nei punti M' e M''; quest'angolo è eguale a quello che fanno fra loro le due tensioni T e $T + dT$ perchè questi due angoli hanno i loro lati rispettivamente perpendicolari due a due. Se prendiamo tre assi coordinati rettangolari OX, OY, OZ passanti dal punto O, avremo proiettando tutte le forze sull'asse delle x e sull'asse delle y:

$$(T + dT)\cos d\theta' - T\cos d\theta'' - fN = 0.$$
$$N - T\,sen\,d\theta'' - (T + dT)\,sen\,d\theta' = 0.$$

Le proiezioni sopra l'asse delle z sono tutte eguali a zero come pure i momenti presi intorno ai tre assi coordinati. Trascurando gl'infinitamente piccoli d'ordine superiore al primo possiamo scrivere

$$T + dT - T - fN = 0$$

oppure,

$$dT - fN = 0$$

e

$$N - T\,d\theta'' - T\,d\theta' = 0.$$

Ma

$$d\theta = d\theta' + d\theta'',$$

abbiamo dunque

$$N - T\,d\theta = 0,$$

da dove

$$N = T\,d\theta,$$

e la prima equazione diventa:

$$dT - fT\,d\theta = 0,$$

da dove

$$\frac{dT}{T} = f\,d\theta.$$

Integrando e lC essendo una costante arbitraria, si ottiene

$$l\,T = f\theta + l\,C,$$

$$l\,\frac{T}{C} = f\theta.$$

Dai logarimmi Neperiani risalendo ai numeri:

$$\frac{T}{C} = e^{f\theta}$$

ed infine

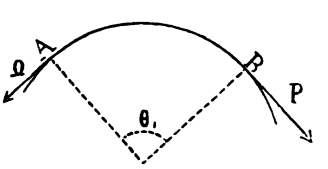
$$T = Ce^{f\theta}$$

Se P è la potenza, Q la resistenza e θ_1 l'angolo totale abbracciato dalla cigna; per $\theta = 0$, cioè al punto A la tensione è eguale a Q,

$$T = C,$$

dunque

$$C = Q.$$



Per

$$\theta = \theta_1$$

la tensione è eguale a P: dobbiamo dunque avere

$$P = Q\,e^{f\theta_1}$$

Se l'attrito fosse eguale a zero, avremmo trovato

$$P = Q;$$

f può esser piccolo quanto si vuole, θ_1 è sempre grande abbastanza ed il termine $e^{f\theta_1}$ è molto grande. Perchè il moto abbia luogo nel senso della potenza bisogna avere

$$P > Qe^{f\theta_1}$$

Cerchiamo qual è il lavoro totale d'attrito quando la cigna percorre sul cilindro un certo spazio S. Supponiamo in primo luogo che questa cigna percorra un certo spazio ds; il corpo M essendo sottomesso ad una forza fN, il lavoro di questa forza è $fN\,ds$.

Ma

$$dT - fN = 0,$$

dunque

$$fN\,ds = dT\,ds.$$

Nello stesso tempo tutti gli elementi della cigna si spostano della quantità ds; il lavoro elementare totale è dunque $ds\,\Sigma\,dT$. Integrando facendo variare T da P fino a Q, il lavoro elementare che ne risulta sarà $ds\ (P - Q)$ e per uno spostamento finito

$$\mathcal{L}f = S\ (P - Q).$$

Come esempio supponiamo una fune che faccia due giri intieri sopra un cilindro di legno; abbiamo

$$f = 0,\ 50,\ \theta = 4\,\pi$$

e troviamo approssimativamente:

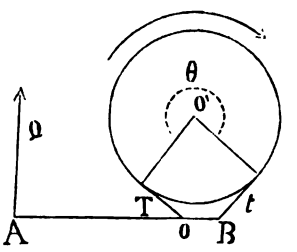
$$P = 530\ Q.$$

Freno a lama flessibile.

Ciò che abbiamo detto nel caso d'una cigna che si muove sopra un cilindro fisso possiamo applicarlo al caso nel quale il cilindro è mobile e la cigna fissa; è il caso che si verifica nel freno a lama flessibile.

Una lama di lamiera fina ricopre circa i tre quarti della cir-

conferenza esterna d'una puleggia. Supponiamo che quando il freno comincia ad agire si sopprimano tutte le forze motrici: ma l'albero



ha una certa potenza viva ed è utile sapere, conoscendo la forza Q, dopo quanti giri l'albero si fermerà: sia x questo numero di giri, la potenza viva finale essendo eguale a zero abbiamo

$$\mathscr{L}f = \Sigma \frac{1}{2} m V^2,$$

$\Sigma \frac{1}{2} m V^2$ essendo la forza viva della macchina. Per causa del moto di cui è animata la puleggia la potenza è $T - t$ ed il lavoro di questa forza per uno spostamento S, $(T-t) S$, per un giro $(T-t) 2\pi R$ e per un numero x di giri: $(T-t) 2\pi R x$, avremo dunque:

$$(T - t) 2\pi R x = \frac{1}{2} \Sigma m V^2,$$

Ma

$$T = Ce^{f\theta}$$

e di più

$$Qa = tb$$

a e b essendo le distanze delle forze Q e t al punto O. Quest'ultima equazione dà

$$t = \frac{Qa}{b}$$

e per conseguenza

$$T - t = Q \left(e^{f\theta} - \frac{a}{b}\right)$$

e l'equazione del lavoro è

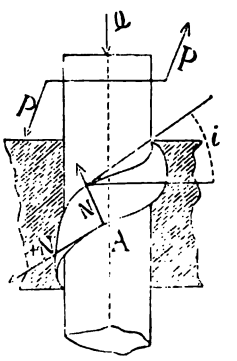
$$Q \left(e^{f\theta} - \frac{a}{b}\right) 2\pi R x = \frac{1}{2} \Sigma m V^2,$$

da dove possiamo dedurre x.

Moto d'una vite mobile in una madrevite fissa.

Supponiamo una vite di raggio r, r essendo il raggio medio, quello cioè d'un cilindro che sarebbe ad egual distanza dal cilindro esterno e dall'anima della vite. Sia i l'angolo che fa la tangente all'elica tracciata sul cilindro medio con la tangente alla sezione retta del cilindro, h essendo il passo della vite, abbiamo

$$h = 2\pi r \operatorname{tang} i.$$



Supponiamo la vite sottomessa all'azione d'una coppia (P, P) che tende a farla salire ed all'azione d'una forza Q che si oppone al suo movimento. Cerchiamo quali sono le condizioni d'equilibrio quando la vite sale con un moto uniforme. In un punto qualunque si sviluppa una reazione avente una componente normale alla vite ed una componente tangenziale che si oppone al moto; nel punto A per esempio avremo le componenti N e fN e così sarà di tutti i punti della superficie di contatto. Vi è dunque equilibrio fra la coppia (P, P), la forza Q e le reazioni N e fN di tutti i punti.

Per esprimere che la somma dei momenti presi intorno all'asse della vite di tutte le forze è eguale a zero, chiamando p il braccio di leva della coppia (P, P) abbiamo

$$Pp - \Sigma Nr \operatorname{sen} i - \Sigma fNr \cos i = 0.$$

Proiettiamo ora tutte le forze sull'asse della vite ed avremo

$$Q - \Sigma N \cos i + \Sigma fN \operatorname{seni} = 0.$$

Queste due equazioni si possono scrivere

$$Pp - r\,sen\,i\,\Sigma N - fr\,cos\,i\,\Sigma N = 0,$$
$$Q - cos\,i\,\Sigma N + f\,sen\,i\,\Sigma N = 0.$$

Eliminiamo ΣN fra queste due equazioni, viene

$$0 = Pp - (r\,sen\,i + fr\,cos\,i)\,\frac{Q}{cos\,i - f\,sen\,i}$$

da dove

$$Pp = Qr\,\frac{sen\,i + f\,cos\,i}{cos\,i - f\,sen\,i}$$

e siccome

$$f = tang\,\Phi,$$

$$Pp = Qr\,\frac{sen\,i + \frac{sen\,\Phi}{cos\,\Phi}\,cos\,i}{cos\,i - \frac{sen\,\Phi}{cos\,\Phi}\,sen\,i},$$

$$Pp = Qr\,tang\,(i + \Phi).$$

È necessario avere

$$Pp > 0,$$

per conseguenza bisogna avere

$$i + \Phi < 90°,$$
$$i < 90° - \Phi.$$

Calcoliamo ora i lavori per un giro intiero della vite; moltiplichiamo per ciò l'ultima equazione trovata per $2\,\pi$, viene

$$2\,\pi\,Pp = Q\,2\,\pi r\,tang\,(i + \Phi)$$

oppure,

$$2\,\pi\,Pp = Q\,2\,\pi\,r\,tang\,i\,\frac{tang\,(i + \Phi)}{tang\,i},$$

$$2\,\pi\,Pp = Q\,h\,\frac{tang\,(i + \Phi)}{tang\,i},$$

ossia

$$\mathscr{L}_m = \mathscr{L}_u\,\frac{tang\,(i + \Phi)}{tang\,i}.$$

Cerchiamo il lavoro motore minimo per un lavoro utile dato. Vi è un minimo perchè per $\mathscr{L}_u = 0$

$$\mathscr{L}_m = \infty$$

e per

$$tang\ (i + \Phi) = 0,$$

$$\mathscr{L}_m = \infty.$$

Prendiamo la derivata di

$$\frac{\mathscr{L}_m}{\mathscr{L}_u} = \frac{tang\ (i + \Phi)}{tang\ i}$$

viene,

$$0 = \frac{tang\ i \dfrac{1}{cos^2\ (i + \Phi)} - tang\ (i + \Phi) \dfrac{1}{cos^2\ i}}{tang^2\ i}$$

e come non si può avere

$$i = 90°$$

bisogna che il numeratore sia eguale a zero

$$\frac{sen\ i}{cos\ i\ cos^2\ (i + \Phi)} - \frac{sen\ (i + \Phi)'}{cos\ (i + \Phi)\ cos^2 i} = 0,$$

oppure, riducendo allo stesso denominatore

$$\frac{sen\ i\ cos\ i - sen\ (i + \Phi)\ cos\ (i + \Phi)}{cos^2\ i\ cos^2\ (i + \Phi)} = 0.$$

Il numeratore non potendo essere infinito, il denominatore deve essere eguale a zero.

Di più abbiamo

$$sen\ 2\ i = sen\ 2\ (i + \Phi).$$

Gli angoli $2\ i$ e $2\ (i + \Phi)$ non possono essere eguali, sono dunque supplementari; abbiamo cioè

$$4\ i + 2\ \Phi = 180°,$$

da dove

$$i = 45° - \frac{\Phi}{2}.$$

In generale non si può adottare questo valore, esso darebbe alla vite una pendenza troppo grande, infatti se avessimo

$$\Phi < 30°,$$

ciò che corrisponde a

$$f < 0,\ 57$$

l'angolo i sarebbe maggiore dell'angolo Φ e la vite discenderebbe da se stessa se il peso Q fosse maggiore della coppia (P, P). Supponiamo infatti che le forze P e Q conservino sempre lo stesso senso, la vite scende: ciò cambierà semplicemente il senso della componente $f N$ e potremo sempre supporre f negativo, ciò che ci conduce alla relazione

$$Pp = Qr \frac{sen\, i - f \cos i}{\cos i + f\, sen\, i}$$

ossia

$$Pp = Qr \frac{sen\, i \cos \Phi - \cos i\, sen\, \Phi}{\cos i \cos \Phi + sen\, i\, sen\, \Phi},$$

$$Pp = Qr \frac{sen\,(i - \Phi)}{\cos\,(i - \Phi)} = Qr\, tang\,(i - \Phi).$$

Perchè la forza P sia nel senso opposto, cioè che il moto discendente abbia luogo malgrado le forze P, bisogna che il valore trovato sia positivo, che si abbia cioè

$$i > \Phi$$

come era stato preveduto.

Se si avesse

$$i < \Phi$$

qualunque fosse la grandezza di Q e se anche la coppia (P, P) fosse eguale a zero, la vite non potrebbe scendere.

Capitolo VII.

Trasmissione del lavoro nelle macchine.

Chiamasi macchina l'insieme dei corpi collegati fra loro in modo tale che se l'uno dei due corpi estremi riceve un certo moto sotto l'azione di una forza chiamata *potenza*, l'altro corpo estremo riceve un moto determinato essendo sempre sottomesso all'azione della *resistenza;* tutti i corpi intermediari servono a trasmettere il moto dal primo all'ultimo e quest'insieme di corpi chiamasi *la trasmissione del moto.*

Teorema.

La variazione di potenza viva di tutti gli organi d'una macchina è eguale alla somma dei lavori delle forze tanto interne che esterne.

La macchina è un sistema materiale, tutti i suoi punti restano a delle distanze invariabili per tutto il tempo che dura l'azione delle forze che le sono applicate, possiamo quindi applicare ad una macchina l'equazione trovata per un sistema materiale,

$$\Sigma \frac{1}{2} MV^2 - \Sigma \frac{1}{2} MV_0^2 = \Sigma \mathscr{L} F + \Sigma \mathscr{L} f.$$

Così conoscendo le forze interne ed esterne che agiscono sopra una macchina, possiamo applicare a questa macchina l'equazione generale del lavoro meccanico.

Le forze che agiscono sopra una macchina possono suddividersi in tre categorie:

1° *Forze motrici.*

2° *Forze resistenti principali.*

3° *Forze resistenti secondarie.*

Le forze motrici sono direttamente applicate al corpo che si muove, il lavoro di queste forze si chiama *lavoro motore.*

In una piallatrice, per esempio, le forze resistenti principali sono le forze che provengono dall'azione dell'utensile sopra il pezzo da piallare. Il lavoro delle forze resistenti principali è il *lavoro utile* della macchine. Questo lavoro utile chiamasi qualche volta *l'effetto dinamico della macchina.* Il lavoro utile è completamente opposto al lavoro motore, i due lavori sono cioè di segni contrari.

Le forze resistenti secondarie dipendono dalla trasmissione del moto fra i differenti organi della macchina; queste forze sono una conseguenza del moto della macchina ed è perciò che esistono solo quando essa è in moto; il lavoro di queste forze è di segno contrario al lavoro motore.

La gravità agisce sempre sopra le macchine; p essendo la sua intensità, $\mathcal{L}_p$ è il suo lavoro che, ora è positivo, ora negativo secondo il senso del lavoro motore. Di più H e Ho essendo le ordinate del centro di gravità della macchina al di sopra di un piano di paragone, alla fine ed al principio del tempo considerato, P essendo il peso della macchina, abbiamo

$$\mathcal{L}_p = P\,(H - H_0).$$

Per conseguenza supponendo il lavoro delle forze molecolari eguale a zero,

$$(\alpha) \qquad \Sigma\,\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_u - \mathcal{L}_f \pm P\,(H - H_0).$$

Quest'equazione dà la somma dei lavori delle forze ed è applicabile ad una macchina qualunque per tutto il tempo che dura il moto.

In tutte le macchine fisse il lavoro proveniente dalla gravità è eguale a zero perchè il centro di gravità non cambia; abbiamo perciò

$$H = H_0$$

e

$$P\,(H - H_0) = 0.$$

Considerando una macchina mobile, il lavoro delle forze molecolari essendo sempre eguale a zero, abbiamo, applicando il teorema della potenza viva:

$$(\beta) \qquad \frac{1}{2}\,MV^2 - \frac{1}{2}\,MV_0^2 = \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_u - \mathcal{L}_f \pm P\,(H - H_0).$$

e nel caso di una macchina fissa

$$(\gamma) \qquad \frac{1}{2} MV^2 - \frac{1}{2} MV_0^2 = \mathcal{L}_m - \mathcal{L}_u - \mathcal{L}f,$$

da dove

$$(\delta) \qquad \mathcal{L}_u = \mathcal{L}_m - \mathcal{L}f - \frac{1}{2} M(V^2 - V_0^2).$$

Abbiamo così l'equazione fondamentale per le macchine e possiamo dire che *in una macchina qualunque il lavoro utile o l'effetto dinamico per un tempo determinato è eguale al lavoro motore sviluppato in tutto questo tempo, diminuito del lavoro delle resistenze secondarie e diminuito dell'accrescimento della potenza viva.*

Macchine che hanno un moto uniforme o che è giunto all'uniformità.

Dicesi che il moto è uniforme quando la velocità è costante: in questo caso la velocità iniziale V_0 al principio del tempo considerato è eguale alla velocità V alla fine di questo tempo, per conseguenza:

$$\frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} MV_0^2$$

l'equazione fondamentale del lavoro d'una macchina si riduce a

$$(\varepsilon) \qquad \mathcal{L}_u = \mathcal{L}_m - \mathcal{L}f,$$

è un'equazione semplicissima che dà il lavoro di una macchina che ha una velocità costante. Quest'equazione (ε) mostra che il lavoro utile è sempre più piccolo del lavoro motore di tutta la quantità rappresentata da $\mathcal{L}f$ ed è per questa semplicissima ragione che il *moto perpetuo* non esiste; perchè esistesse bisognerebbe avere ad ogni istante

$$\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_m,$$

condizione che non può mai essere adempiuta nella pratica poichè

ogni macchina ha degli organi di trasmissione e pesa; però abbiamo sempre

$$\mathcal{L}_u < \mathcal{L}_m.$$

Coeficiente dell'effetto utile.

Chiamasi *coeficiente dell' effetto utile d'una macchina il rapporto del lavoro utile al lavoro motore*, esso è dunque $\frac{\mathcal{L}_u}{\mathcal{L}_m}$. Se nell'equazione ($\varepsilon$) dividiamo i due membri dell'equazione per $\mathcal{L}_m$ viene:

(γ) $$\frac{\mathcal{L}_u}{\mathcal{L}_m} = 1 - \frac{\mathcal{L}_f}{\mathcal{L}_m}$$

Il rapporto $\frac{\mathcal{L}f}{\mathcal{L}_m}$ ha sempre un certo valore e per conseguenza avremo sempre

$$1 - \frac{\mathcal{L}_f}{\mathcal{L}_m} < 1.$$

Si può scrivere

$$1 - \frac{\mathcal{L}_f}{\mathcal{L}_m} = K,$$

K chiamasi il *coeficiente dell'effetto utile* ed abbiamo la formula

(μ) $$\mathcal{L}_u = K\,\mathcal{L}_m$$

Dunque in generale il coeficiente dell'effetto utile d'una macchina è sempre più piccolo dell' unità ed il lavoro utile è eguale al lavoro motore moltiplicato per questo coeficiente, per conseguenza il lavoro utile è tanto più grande quanto più K si avvicina all'unità.

L'esperienza ci fornisce i dati seguenti.

Macchine cattive: K varia da 0,35 a 0,40,
» buone: K » 0,50 a 0,65,
» buonissime: K » 0,70 a 0,80.

L'equazione (μ) dà:

(μ') $$\mathcal{L}_m = \frac{\mathcal{L}_u}{K}$$

Si adopra l'equazione (μ') per sapere qual è il lavoro motore che dobbiamo sviluppare per un lavoro utile dato; supponiamo per esempio $\mathcal{L}_u = 35$ cavalli-vapore,

$$K = 0{,}60,$$

il lavoro motore da sviluppare è:

$$\mathcal{L}_m = \frac{35}{0{,}60} = 58{,}3;$$

ciò vuol dire che, se si tratta per esempio d'una ruota idraulica o di una turbina, la caduta d'acqua deve produrre 58,3 cavalli-vapore per poterne trasmettere 35; è evidente che la differenza (58,3 — 35) rappresenta il lavoro delle forze resistenti secondarie:

$$\mathcal{L}_f = 58{,}3 - 35 = 23{,}3.$$

Gli organi di trasmissione hanno assorbito 23,3 cavalli-vapore di forza per far produrre alla macchina un effetto utile di 35 cavalli-vapore.

Supponiamo ora, e teoricamente ciò è possibile

$$\mathcal{L}_f = 0.$$

L'equazione (ϵ) diventa

$$\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_m;$$

applichiamo quest'equazione ad un argano. Sia P la forza resistente e Q la forza movente che agiscono sopra i cilindri di raggi costanti p ed r. Per un giro abbiamo

$$\mathcal{L}_m = Qr \times 2\pi,$$

$$\mathcal{L}_u = Pp \times 2\pi;$$

e come

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_u,$$

$$Qr = Pp$$

da dove

$$\frac{Q}{P} = \frac{p}{r};$$

le forze sono inversamente proporzionali ai loro bracci di leva.

Moltiplichiamo il secondo membro dell'equazione per $\frac{\omega}{\omega}$, ω essendo la velocità angolare dell'albero dell'argano, avremo

$$\frac{Q}{P} = \frac{\omega p}{\omega r};$$

se V è la velocità lineare prodotta dalla forza Q e V' la velocità lineare prodotta dalla forza P, abbiamo

$$V = \omega r,$$

$$V' = \omega p$$

e per conseguenza:

$$\frac{Q}{P} = \frac{V'}{V},$$

le forze sono inversamente proporzionali alle velocità e per conseguenza inversamente proporzionali agli spazi percorsi dai punti d'applicazione; si può quindi stabilire il principio fondamentale seguente:

Ciò che si acquista in forza si perde in velocità e reciprocamente.

In fatti abbiamo

$$QV = PV',$$

supponiamo che il lavoro o l'effetto da produrre sia costante, avremo

$$QV = \text{costante:}$$

se si raddoppia la velocità del punto d'applicazione della forza Q e se V_1 è questa nuova velocità, la forza Q diventerà Q_1 e perchè l'equazione precedente sia soddisfatta, poichè

$$V_1 = 2\ V,\ Q_1 = \frac{Q}{2}.$$

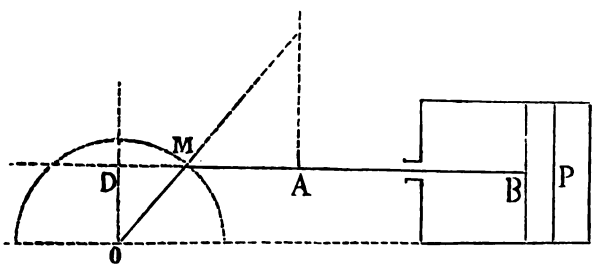
Macchina il di cui moto è periodicamente uniforme.

Macchina a vapore allo stato di regime.

Dicesi che *una macchina è allo stato di regime allorquando possiede la velocità conveniente per effettuare il lavoro al quale è destinata ed allorquando la sua velocità angolare è costante.* Non bisogna conchiudere da ciò che la velocità lineare in una macchina allo stato di regime è costante. Nelle macchine a vapore il

moto è trasmesso da una biella e da una manovella; risulta dallo studio cinematico di questo moto che la velocità della manovella è essenzialmente variabile; possiamo d'altronde stabilire una relazione semplicissima fra la velocità della biella e quella della manovella.

Supponiamo una manovella *OM* che descrive una circonferenza di circolo ed una biella *AM* articolata in *M* con la manovella ed in *A* con l'estremità dello stantuffo *P*. Il punto *A* ha lo stesso moto dello stantuffo *P*, di più i tre organi considerati ed i punti *A* e *M* sono sempre ad una distanza invariabile l'uno dall'altro; abbiamo dunque un sistema invariabile che si muove in un piano ed è facile



trovare le velocità dei punti *A* e *M* applicando il teorema dei centri istantanei di rotazione. Conduciamo *AC* perpendicolare ad *AB* e *MC* perpendicolare allo spazio infinitamente piccolo *ds* percorso dal punto *M* in un tempo infinitamente piccolo *dt*. La normale *MC* alla circonferenza di circolo nel punto *M* è il prolungamento di *OM*, abbiamo dunque facilmente il centro istantaneo di rotazione *C* corrispondente ad una certa posizione della manovella e per conseguenza ad un istante qualunque del moto considerato. Sia V_s la velocità dello stantuffo che è anche quella del punto *A* e V_m la velocità del punto *M*, avremo

$$\frac{Vs}{Vm} = \frac{AC}{CM}.$$

Prolunghiamo *AM*, dal punto *O* inalziamo *OD* perpendicolare sopra *OA* e prolunghiamola finchè non incontri *AM*. Sulla figura:

$$\frac{AC}{CM} = \frac{OD}{OM}.$$

Se r è il raggio della manovella e ω la sua velocità angolare,

$$V_m = \omega r,$$

e

$$\frac{V_s}{V_m} = \frac{AC}{CM} = \frac{OD}{OM} = \frac{OD}{r}$$

$$(\alpha) \qquad V_s = \omega \times OD$$

Abbiamo così una relazione semplicissima fra la velocità dello stantuffo, la velocità angolare della manovella e la retta OD. La formula (α) mostra che la velocità angolare della manovella varia con la lunghezza OD, cioè con la posizione della biella relativamente alla linea dei punti morti.

Consideriamo un certo numero di rivoluzioni della macchina a vapore allo stato di regime, il moto essendo uniformemente periodico, dobbiamo avere

$$V = V_0$$

e per conseguenza:

$$\frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} MV_0^2,$$

l'equazione fondamentale del lavoro delle macchine si riduce a

$$\mathscr{L}_u = \mathscr{L}_m - \mathscr{L}_f.$$

Troviamo dunque lo stesso risultato che per le macchine che hanno un moto uniforme purchè si prenda la macchina allo stato di regime e che il tempo considerato corrisponda ad un numero esatto di rivoluzioni.

Consideriamo ora il lavoro di una macchina dal momento in cui comincia ad agire fino al momento che torna al riposo.

L'equazione generale del lavoro di una macchina è:

$$\mathscr{L}_u = \mathscr{L}_m - \mathscr{L}_f - \frac{1}{2} MV^2 - \frac{1}{2} MV_0^2;$$

la macchina partendo dal riposo,

$$V_0 = 0$$

e la velocità V, una volta il moto della macchina principiato, aumenta sempre sino a che, V_r essendo la velocità di regime, si abbia

$$V = V_r$$

ed allora

$$\mathscr{L}_u = \mathscr{L}_m - \mathscr{L}_f - \frac{1}{2} M V_r^2.$$

Quest'equazione dà l'effetto utile della macchina dall'istante preciso in cui comincia il moto sino all'istante preciso in cui la macchina è allo stato di regime; abbiamo dunque per tutto questo tempo:

$$\mathscr{L}_u < \mathscr{L}_m - \mathscr{L}_f$$

e quando la macchina è allo stato di regime

$$\mathscr{L}_u = \mathscr{L}_m - \mathscr{L}_f.$$

Paragonando queste due ultime espressioni vediamo che nel tempo necessario perchè la macchina si metta allo stato di regime vi è una perdita di effetto utile eguale a $\frac{1}{2} M V_r^2$; quest'effetto utile è stato tutto impiegato per mettere in moto la macchina e dicesi in questo caso che *vi è stata trasformazione di lavoro in potenza viva.*

Avanti che la macchina si fermi abbiamo

$$V_0 = Vr$$

e per conseguenza

$$\mathscr{L}_e = \mathscr{L}_m - \mathscr{L}_f + \frac{1}{2} m V_r^2,$$

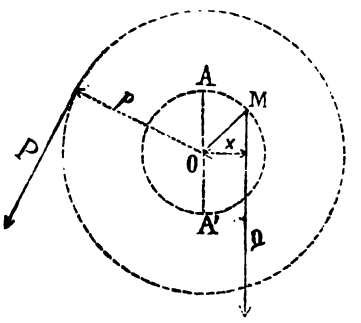
$$\mathscr{L}_u > \mathscr{L}_m - \mathscr{L}_f.$$

Dunque teoricamente il lavoro utilizzato quando la macchina si ferma è superiore a quello utilizzato quando è allo stato di regime e quest'aumento di lavoro utile è eguale a $\frac{1}{2} M V_r^2$; dicesi in questo caso che *la potenza viva della macchina è trasformata in lavoro utile* e se supponiamo che una macchina possa mettersi in moto e nello stesso tempo fermarsi, vedremo che il lavoro trasformato in potenza viva nel primo caso è precisamente eguale alla potenza viva trasformata in lavoro nel secondo.

Cause d' irregolarità nelle macchine.
Trasformazioni cinematiche dei moti.

Questa prima causa d'irregolarità non può mai essere evitata poichè essa dipende dalla disposizione stessa degli organi della macchina. Sia una macchina a vapore che agisce per mezzo di una

biella e di una manovella OM sull'albero orizzontale O; se anche la resistenza P fosse costante si avrebbe sempre una variazione nella velocità angolare. Infatti supponiamo la forza Q rappresentata da



una retta di medesima lunghezza della biella e sempre parallela all'asse dei punti morti AA': applicando a questo sistema il teorema della velocità angolare, abbiamo

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma \mathcal{M}_o F}{\Sigma M r^2} dt.$$

L'espressione $\Sigma M_r r^2$ chiamasi *il momento d'inerzia del sistema* ed indicasi con la lettera I, perciò

$$\Sigma M r^2 = I.$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma \mathcal{M}_o F}{I}.$$

Abbiamo da considerare le due sole forze P e Q.

$$\mathcal{M}_o P = Pp.$$

$$\mathcal{M}_o Q = Qx,$$

x essendo la distanza variabile dal punto O alla retta MQ: abbiamo

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pp - Qx}{I} dx;$$

x variando con l'angolo dx ne risultano delle variazioni per $\frac{d\omega}{dt}$ variazioni che provengono dalla trasformazione del moto in circolare da rettilineo che era.

Variazioni della potenza e della resistenza.

In modo generale tutte le macchine subiscono delle variazioni da parte della potenza motrice che loro è applicata. Per esempio in una ruota idraulica la potenza motrice varia con la quantità d'acqua che cade nell'unità di tempo su questa ruota. Nelle macchine a vapore la potenza motrice varia con la pressione del vapore nelle caldaie. In una macchina che fa muovere la mano dell'uomo la potenza motrice varia con lo sforzo più o meno grande che fa quest'uomo.

Le variazioni dovute alla resistenza provengono da questo fatto che gli utensili messi in moto dalla macchina non lavorano sempre. Queste cause di variazioni si attenuano più che si può mediante l'impiego combinato dei volani e dei regolatori.

Instabilità delle macchine fisse.

Una macchina fissa si compone sempre di due parti essenziali:

1° Un insieme di pezzi che non si muovono mai e che in certo modo formano la base della macchina.

2° Un insieme di organi essenzialmente mobili come sarebbero gli stantuffi, le bielle, le manovelle ecc.

Il centro di gravità della prima parte è sempre fisso mentre quello della seconda è sempre mobile; però il centro di gravità di tutta la macchina è fisso poichè essa ha fondazioni disposte per ciò. Per ottenere questo risultato è necessario, quando il centro di gravità della parte mobile si alza che quello della parte fissa si abbassi in proporzione perchè la velocità di traslazione è nulla e inversamente. Risulta da ciò un'azione della base della macchina sulle fondazioni, azione che si manifesta con delle vibrazioni nell'insieme di tutto il sistema e che non è possibile eliminare ma che si possono in parte attenuare riunendo tutti gli organi della macchina sopra una stessa base di ghisa.

Nelle macchine mobili gli effetti indicati sono maggiori e bisogna munire le ruote motrici di contrappesi per fare equilibrio alle bielle ed alle manovelle.

Secondo il moto del centro di gravità dei pezzi mobili, si danno differenti nomi agli effetti prodotti. Vi è *tangaggio* quando il centro di gravità si sposta orizzontalmente nel senso dello spazio percorso. Vi è *rullio* quando il centro di gravità si sposta a destra od a sinistra del piano medio secondo il quale si effettua il movimento. La *vibrazione* è un movimento dall'alto in basso e dal basso in alto. Infine in un treno che cammina, per esempio, si osserva anche il *beccheggiamento,* moto che facilmente è dovuto all'attrito delle ruote sulle verghe soprattutto quando i vagoni sono male attaccati.

INDICE

INTRODUZIONE .. .. pag. 5

Cinematica.

CAPITOLO I. Moto d'un punto .. ..

» II. Determinazione del moto effettivo d'un punto per mezzo delle sue proiezioni sopra tre assi coordinati.. 16

» III. Moto di un solido nello spazio.. 29

» IV. Moti composti 37

Dinamica di un punto materiale.

» I. Azione e composizione delle forze applicate ad un punto materiale 66

» II. Moto di un punto materiale libero. 93

» III. Moto di un punto materiale non libero 133

Dinamica dei sistemi materiali 145

Statica.

» I. Equilibrio dei corpi. 154

» II. Sistemi di forze equivalenti 170

» III. Equilibrio dei corpi pesanti 186

» IV. Equilibrio dei corpi destinati a pesare i corpi 206

» V. Poligoni articolati 214

» VI. Equilibrio delle macchine semplici.. 228

» VII. Trasmissione del lavoro nelle macchine 266